*Jurnal Derivat, Volume 8 No. 2 Desember 2021*
*ISSN:* 2549-2616

# Transformasi Fourier Multiplikatif Dan Aplikasinya Pada Persamaan Diferensial Multiplikatif

**Aurizan Himmi Azhar[1)], Sugiyanto[2)], Muhammad Wakhid Musthofa[3)], Muhamad Zaki Riyanto[4)]**
[1,2,3,4]Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
email: [1]aurizanhimmi@gmail.com
[2]sugiyanto@uin-suka.ac.id
[3]Muhammad.musthofa@uin-suka.ac.id
[4]zaki.mei@uin-suka.ac.id

**Abstrak :**

Penelitian ini merupakan pengembangan dari kalkulus multiplikatif. Penelitian ini berisi tentang transformasi Fourier multiplikatif dan aplikasinya pada persamaan diferensial multiplikatif. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui transformasi Fourier multiplikatif serta persamaan diferensial multiplikatif. Penelitian ini mengandung simulasi numerik untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial multiplikatif biasa orde satu. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian deskriptif melalui studi literatur. Hasil penelitian ini adalah aplikasi transformasi Fourier multiplikatif pada persamaan diferensial multiplikatif dan solusi numerik persamaan diferensial multiplikatif biasa dengan metode Adam Bashforth-Moulton multiplikatif.

**Kata Kunci:** Kalkulus Multiplikatif, Transformasi Fourier Multiplikatif, Persamaan Diferensial Multiplikatif, Metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif

***Abstract:***

*This research is a development of multiplicative calculus. This study is about the Fourier multiplicative transformation and its application to the multiplicative differential equation. This study aims to determine the Fourier multiplicative transformation as well as the multiplicative differential equation. This study contains numerical simulations to solve the problem of ordinary multiplicative differential equations of the first order. The methods used in this research are descriptive research methods through the study of literature. The results of this study are the application of multiplicative Fourier transformations to multiplicative differential equations and numerical solutions of ordinary multiplicative differential equations with the Adam Bashforth-Moulton multiplicative method.*

***Keywords:*** *Multiplicative Calculus, Fourier Multiplicative Transformation, Multiplicative Differential Equations, Adams Bashforth Moulton Multiplicative Method*

## 1. PENDAHULUAN

Michael Grossman dan Robert Katz pada 1972, menyatakan bahwa beberapa jenis kalkulus selain kalkulus Newton (kalkulus biasa) dapat dikonstruksi secara independen, dan disebut kalkulus non-Newtonian (Mustafa Riza, 2009). Salah satu jenis kalkulus non-Newtonian adalah kalkulus multiplikatif. Konsep dalam kalkulus multiplikatif didasarkan pada perpindahan peran operasi penjumlahan dan pengurangan dalam kalkulus Newton menjadi operasi perkalian dan pembagian (Agamirza E. Bashirov, 2008).

Penelitian ini menjelaskan tentang kalkulus multiplikatif, transformasi Fourier multiplikatif, aplikasi transformasi Fourier multiplikatif dalam persamaan diferensial multiplikatif serta terdapat simulasi numerik penyelesaian persamaan diferensial multiplikatif. Materi tersebut dimaksudkan untuk menjelaskan kepada pembaca terkait terapan masalah matematika bisa dikaitkan dengan masalah fisis.

Penelitian ini muncul didasari E-Jurnal yang berjudul "Multiplicative Fourier Transform and its Applications to Multiplicative Differential Equations" oleh Aarif Hussain Bhat, Javid Majid, Tafazul Rehman Shah, Imtiyaz Ahmad Wani dan Renu Jain (2019). Kemudian Penulis tertarik untuk menjabarkan jurnal tersebut serta melengkapinya, untuk kepentingan keilmuan akademik. Penulis menambahkan simulasi numerik kedalam penelitian ini supaya pembaca dapat lebih memahami penelitian ini.

Pada penulisan skripsi ini mengacu pada literatur-literatur sebagai landasan teori yang sesuai dengan pembahasan skripsi ini. Beberapa pengertian mengenai dasar persamaan diferensial mengacu pada buku yang ditulis oleh Sugiyanto dan Slamet Mugiyono (2011). Adapun beberapa tinjauan pustaka yang digunakan sebagai rujukan utama yaitu :

a) E-jurnal yang berjudul "Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods" oleh Emine Misirli dan Yusuf Gurefe (2010). Jurnal tersebut berisi tentang metode Adams Bashforth-Moulton versi multiplikatif untuk menyelesaiakan solusi numerik dari persamaan diferensial multiplikatif.
b) Skripsi yang berjudul "Metode Adams Bashforth–Moulton Multiplikatif Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif" oleh Arif Setiawan (2014), mahasiswa Universitas Sebelas Maret. Skripsi ini berisi tentang mengkonstruksi ulang metode Adams Bashforth-Moulton Multiplikatif (ABMM) orde empat, serta menyusun dan menerapkan algoritmanya untuk menyelesaikan masalah nilai awal Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang dapat dinyatakan ke masalah nilai awal Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif (PDBM).
c) E-jurnal yang berjudul "Multiplicative Fourier Transform and its Applications to Multiplicative Differential Equations" oleh Aarif Hussain Bhat, Javid Majid, Tafazul Rehman Shah, Imtiyaz Ahmad Wani dan Renu Jain(2019). Jurnal tersebut berisi tentang kalkulus multiplikatif, transformasi Fourier multiplikatif serta aplikasi transformasi Fourier multiplikatif pada persamaan diferensial multiplikatif.

## 2. METODE PENELITIAN

Metode yang penulis gunakan dalam penelitian ini yaitu metode penelitian deskriptif melalui studi literatur, yaitu membahas topik masalah secara teoritis dan konseptual yang berkaitan dengan transformasi Fourier multiplikatif dan aplikasinya pada persamaan diferensial multiplikatif serta penggunaan metode numerik dalam menganalisis dan menemukan solusi dari suatu persamaan diferensial mutiplikatif. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah

a) Mengkaji kalkulus multiplikatif, transformasi Fourier multiplikatif, aplikasi transformasi Fourier multiplikatif pada persamaan diferensial multiplikatif yang diperoleh dari jurnal, buku, dan skripsi.
b) Mengkontruksi ulang metode Adam Bashforth-Moulton Multiplikatif (ABMM) orde empat menggunakan konsep eksponensial interpolasi pembagian mundur Newton, diferensial multiplikatif, dan integral multiplikatif.
c) Menyusun algoritma metode ABMM orde empat dan menyatakannya pada program komputer dalam *software* Maple.
d) Menerapkan metode ABMM orde empat dan metode ABM orde empat dalam menyelesaikan beberapa masalah nilai awal dan sistem masalah nilai awal PDB orde satu yang dapat dinyatakan ke bentuk masalah nilai awal dan sistem masalah nilai awal PDBM orde satu.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### Derivatif Multiplikatif

Asumsikan bahwa menyetorkan \$$a$ ke rekening bank seseorang mendapat \$$b$ setelah satu tahun. Kemudian jumlah awal berubah $b/a$ kali. Berapa kali perubahan bulanan? Untuk ini, asumsikan bahwa perubahan selama sebulan adalah $p$ kali. Kemudian selama satu tahun jumlah totalnya menjadi $b = ap^{12}$. Sekarang didapat menghitung sebagai $p = (b/a)^{1/12}$. Dengan asumsi bahwa deposit berubah setiap hari, pada setiap jam, pada setiap menit, setiap detik, dll. dan fungsinya, yang menyatakan nilainya pada waktu yang berbeda momen adalah $f$, kami menemukan rumusnya

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad (1.1)$$

Menunjukkan berapa kali jumlah $(x)$ berubah pada saat . Membandingkan (2.1) dengan definisi turunan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (1.2)$$

Didapatkan bahwa selisih $f(x+h)-f(x)$ pada (1.2) diganti dengan rasio $f(x+h)/f(x)$ pada (1.1) dan pembagian dengan $h$ diganti dengan kenaikan pangkat $\frac{1}{h}$. Limit (1.1) disebut turunan multiplikatif atau secara singkat, *turunan dari $f$ pada $x$ dan itu dilambangkan dengan $f^*(x)$.

**Definisi 1.1** : Misalkan g : $R \to R^+$ menjadi fungsi positif. Differensial multiplikatif dari fungsi $g$ diberikan oleh

$$\frac{d^*g}{dt}(t) = g^*(t) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(t+h)}{g(t)}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Diasumsikan bahwa fungsi $g$ adalah positif kemudian menggunakan properti dari differensial klasiknya didapatkan differensial multiplikatif sebagai

$$\frac{d^*g}{dt}(t) = g^*(t) = e^{\frac{g'(t)}{g(t)}} = e^{(ln\, og)'(t)}$$

Untuk $(ln\, og)$ = $ln\,(g(t)$.

**Definisi 1.2**: Jika $g$ adalah fungsi positif dan jika $g^*$ adalah differensial multiplikatif dari $g$, sekarang jika fungsi $g^*$ juga memiliki differensial multiplikatif yang diberikan oleh $g^{**}$ dan itu disebut yang kedua orde differensial multiplikatif dari $g$. Demikian pula didapatkan definisi $g^{*(n)}$. Yang disebut urutan ke-n differensial multiplikatif dari $g$. Dengan mengulang operasi diferensiasi multiplikatif sebanyak n kali, akan ditemukan differensial multiplikatif orde ke-n dari fungsi positif $g$ pada titik t yang mana didefinisikan sebagai

$$g^{*(n)} = e^{(ln\, og)^{n}(t)}$$

**Teorema 1.1**: Misalkan $g$ dan $h$ dapat diturunkan dengan turunan multiplikatif. Jika $c$ konstanta sembarang, maka $c.g, gh, g = h, {}^{g}/_{g}, g^h$ fungsi dapat diturunkan dengan turunan multiplikatif dan turunan multiplikatifnya dapat ditunjukkan sebagai

a) $(c.g)^*(t) = g^*(t),$
b) $(g.h)^*(t) = g^*(t).h^*(t),$
c) $(g+h)^*(t) = g^*(t)^{\frac{g(t)}{g(t)+h(t)}}h^*(t)^{\frac{h(t)}{g(t)+h(t)}},$
d) $\left({}^{g}/_{h}\right)^*(t) = \frac{g^*(t)}{h^*(t)},$
e) $\left(g^h\right)^*(t) = g^*(t)^{h(t)}g(t)^{h'(t)}$

**Teorema 1.2** : Jika suatu fungsi positif dapat diturunkan dengan turunan multiplikatif pada titik $t$, maka dapat dibedakan dalam pengertian klasik dan hubungan antara kedua turunannya dapat ditunjukkan sebagai

$$g'(t) = g(t) \ln g^*(t)$$

**Teorema 1.3**: $g^*(t) = 1$ untuk $\forall t \in (a, b) \leftrightarrow g(t) = c > 0$ adalah fungsi tetap dalam interval terbuka $(a, b)$

**Teorema 1.4**: Jika suatu fungsi positif $g$ diferensiabel pada $t$, maka fungsi tersebut juga *diferensiabel pada $t$, dan

$$g^*(t) = e^{\left[\frac{g'(t)}{g(t)}\right]}$$

Kebalikan dari teorema (1.4) juga benar selama $g^*$ serta $g$ adalah positif.

**Teorema 1.5**: Misalkan $h$ dapat diturunkan dalam arti turunan multiplikatif, $g$ bisa dibedakan dalam pengertian klasik. Jika $g(t) = (hok)(t)$, Kemudian, dapat ditulis dengan

$$g^*(t) = [h^*(k(t))]^{k'(t)}$$

**Teorema 2.6**: Misalkan adalah fungsi positif maka, $g^*(t) = 1 \leftrightarrow g'(t) = 0$

## Integral Multiplikatif

**Definisi 2.1**: Integral multiplikatif juga didefinisikan oleh (Agamirza E. Bashirov, 2008) Untuk fungsi terbatas positif dan jika $g$ adalah integral Riemann pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b g(t)^{dt} = exp\left(\int_a^b \ln g(t)\, dt\right) = e^{\int_a^b (\ln g(t))dt}$$

Integral multiplikatif ini memiliki sifat-sifat berikut:

a) $(a) \int_a^b \left((g(t)^k\right)^{dt} = \left(\int_a^b g(t)^{dt}\right)^k, dimana\ k \in R$
b) $(b) \int_a^b (g(t)h(t))^{dt} = \int_a^b g(t)^{dt} \int_a^b h(t)^{dt}$
c) $(c) \int_a^b \left(\frac{g(t)}{h(t)}\right)^{dt} = \frac{\int_a^b (g(t))^{dt}}{\int_a^b (h(t))^{dt}}$
d) $(d) \int_a^b g(t)^{dt} = \int_a^c g(t)^{dt} \int_c^b g(t)^{dt}\ a \leq c \leq b$

Dimana $g$ dan $h$ merupakan integral multiplikatif $[a, b]$.

### Transformasi Fourier Multiplikatif

Pada bagian ini akan didefinisikan transformasi Fourier multiplikatif dan akan diturunkan beberapa property transformasi Fourier multiplikatif.

**Definisi 3.1**: Misalkan $(t)$ menjadi fungsi pasti positif yang diberikan pada interval $(-\infty, \infty)$. Kemudian multiplikatif Transformasi Fourier dari $(t)$ didefinisikan sebagai

$$\digamma_m\{f(t)\} = F_m(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^{e^{ipt^{dt}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} \ln f(t) dt} = e^{\digamma\{\ln\ \ (t)\}}$$

Di sini, integral multiplikatif, yang didefinisikan sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^{dt} = e^{\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) dt}$$

telah digunakan.

Karena $f(t)$ adalah fungsi definit positif, logaritmanya ada, maka Transformasi Fourier dari $\ln f(t)$ ada, Oleh karena itu Transformasi Fourier Multiplikatif yang didefinisikan oleh definisi (3.1) terdefinisi dengan baik. Menurut definisi, transformasi Fourier multiplikatif dari beberapa fungsi dasar dapat diberikan sebagai berikut:

a) $\digamma_m\{e^{f(t)}\}$, dimana $f(t) = \begin{cases} 1 & ,|x| < a \\ 0 & ,|x| > a \end{cases}$

Bukti: Dengan menggunakan definisi (3.1) diperoleh

$$\digamma_m\left(e^{f(t)}\right) = e^{\frac{2sinpa}{p\sqrt{2\pi}}}, p \neq 0$$

b) $\digamma_m\{e^{f(t)}\}$, dimana $f(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\epsilon}, |t| \leq 1 \\ 0 \quad, |t| > 1 \end{cases}$

Bukti: Dengan menggunakan definisi (3.1) diperoleh

$$\digamma_m\{e^{f(t)}\} = e^{\frac{sinp\epsilon}{p\epsilon}}$$

c) $\digamma_m\{e^{f(t)}\}$, dimana $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, |t| \leq 1 \\ 0 \qquad, |t| > 1 \end{cases}$

Bukti: Dengan menggunakan definisi (3.1) diperoleh

$$\digamma_m\{e^{f(t)}\} = e^{-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{pcosp - sinp}{p^3}\right\}}$$

**Teorema 3.1**: (Sifat Linier Multiplikatif)
Transformasi Fourier Multiplikatif adalah multiplikatif linier, dengan kata lain, jika $c_1 c_2$ eksponen sebarang dan $f_1 f_2$ adalah dua fungsi yang diberikan, yang memiliki transformasi Fourier multiplikatif maka

$$\digamma_m\{f_1{}^{c_1} f_2{}^{c_2}\} = \digamma_m\{f_1\}^{c_1} \digamma_m\{f_2\}^{c_2}$$

**Teorema 3.2**: (Sifat pergeseran pertama Multiplikatif)
Misalkan transformasi Fourier Multiplikatif dari fungsi $f(t)$ menjadi $F_m(p)$ yaitu $\digamma_m\{(t)\} = F_m(p)$, Maka

$$\digamma_m\left\{f(t)^{e^{iat}}\right\} = F_m(p + a)$$

**Teorema 3.3**: (Sifat Skala Perubahan Multiplikatif)
Misalkan $\digamma_m\{f(t)\} = F_m(p)$ maka didapatkan

$$\digamma_m\{f(at)\} = F_m\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$$

**Teorema 3.4**: Misalkan $\digamma_m\{f(t)\} = F_m(p)$ maka

$$\digamma_m\{f(t)^{t^{2n}}\} = F_m{}^{*2n}(p)^{(-1)^n}, \quad dimana\ n = 1,3,5 \ldots\ldots$$
$$= F_m{}^{*2n}(p)^{(1)^n}, \quad dimana\ n = 2,4,6 \ldots\ldots$$

Bukti: akan dibuktikan teorema ini dengan metode induksi, pertama diambil $n = 1$ menggunakan definisi didapatkan

$$\digamma_m\{f(t)\} = F_m(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^{e^{ipt dt}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt}$$

Akibatnya, mengambil turunan multiplikatif orde kedua dari ekspresi ini didapatkan

$$F_m{}^{*2}(p) = \frac{d^{*2}}{dp^{*2}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt}\right)$$

$$F_m{}^{*2}(p) = e^{\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \ (t)^{t^2} e^{ipt} dt\right\}^{-1}}$$

$$F_m{}^{*2}(p) = \text{Ƒ}_m\{f(t)^{t^2}\}^{(-1)}$$

dan didapatkan persamaan berikut

$$\text{Ƒ}_m\left\{f(t)^{t^2}\right\} = F_m{}^{*2}(p)^{(-1)}$$

Diasumsikan hipotesis berlaku untuk kasus $n = k$ maka didapatkan

$$F_m{}^{*2k}(p) = \text{Ƒ}_m\left\{f(t)^{t^{2k}}\right\}^{(-1)^k} = e^{\frac{(-1)^{(k+1)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\ln\ (t)e^{ipt}dt}$$

Sekarang jika turunan multiplikatif diambil lagi untuk persamaan terakhir, didapatkan

$$F_m{}^{*2(k+1)}(p) = e^{\frac{(-1)^{(k+1)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2(k+1)}\ln f(t)e^{ipt}dt}$$

$$F_m{}^{*2(k+1)}(p) = \text{Ƒ}_m\left\{f(t)^{t^{2(k+1)}}\right\}^{(-1)^{(k+1)}}$$

Buktinya sudah selesai sekarang, selain itu didapatkan

$$\text{Ƒ}_m\left\{f(t)^{t^{2n}}\right\} = F_m{}^{*2n}(p)^{(-1)^n} \quad = \frac{1}{F_m{}^{*2n}(p)}\ , \quad jika\ n\ ganjil$$
$$= F_m{}^{*2n}(p)\ , \quad jika\ n\ genap$$

**Teorema 3.5**: (Teorema konvolusi Multiplikatif)

Jika $\text{Ƒ}_m{}^{-1}\{F(p)\} = f(t)$ dan $\text{Ƒ}_m{}^{-1}\{G(p)\} = g(t)$

Maka $\text{Ƒ}_m{}^{-1}\left\{F_m(p)^{g(p)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}$

Bukti: Menerapkan transformasi Fourier multiplikatif ke integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}$

$$\text{Ƒ}_m\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}\right\} = \text{Ƒ}_m\left\{e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\ln\ (x)dx}\right\}$$

$$\text{Ƒ}_m\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}\right\} = e^{F\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\ln\ (x)dx\right\}}$$

Dari sifat konvolusi Transformasi Fourier didapatkan

$$\text{Ƒ}_m\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}\right\} = e^{\text{Ƒ}\{\ln f(x)\}\text{Ƒ}\{g(x)\}}$$

$$\text{Ƒ}_m\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}\right\} = F_m(p)^{G(p)}$$

$$\text{Ƒ}_m{}^{-1}\left\{F_m(p)^{G(p)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{g(t-x)^{dx}}$$

**Teorema 3.6**: (Teorema Modulasi multiplikatif)

Jika $F_m(p)$ adalah transformasi Fourier Multiplikatif dari $f(t)$ maka transformasi Fourier multiplikatif dari $\{f(t)^{\cos(at)}\}$ adalah $F_m(p+a)^{\frac{1}{2}}F_m(p-a)^{\frac{1}{2}}$ yaitu

$$\text{Ƒ}_m\{f(t)^{cosat}\} = F_m(p+a)^{\frac{1}{2}}.F_m(p-a)^{\frac{1}{2}}$$

**Teorema 3.7**: (Hubungan antara Transformasi Fourier Multiplikatif dan Transformasi Laplace Multiplikatif)

Kami akan menunjukkan bahwa transformasi Fourier multiplikatif dari fungsi $f(t)$ adalah Transformasi Laplace multiplikatif dari fungsi $g(t)$ yaitu

$$\text{Ƒ}_m\{f(t)\} = \mathcal{L}_m\{g(t)\}$$

Bukti: Perhatikan fungsinya

$$f(x) = \begin{cases} g(t)^{e^{-xt}}, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

Kemudian transformasi Fourier multiplikatif dari $(t)$ diberikan oleh

$$\digamma_m\{f(t)\} = e^{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} \ln f(t) dt}$$

(Mengambil bentuk transformasi Fourier multiplikatif yang tidak simetris)

$$\digamma_m\{f(t)\} = e^{\int_{-\infty}^{0} e^{ipt} \ln(1) dt + \int_{0}^{\infty} e^{ipt} \ln g(t)^{e^{-xt}} dt}$$

Sekarang dengan membuat substitusi $(x - ip) = s$, didapatkan

$$\digamma_m\{f(t)\} = e^{\int_0^{\infty} \ln g(t) e^{-st} dt}$$
$$\digamma_m\{f(t)\} = \mathcal{L}_m\{g(t)\}$$

**Teorema 3.8**: Misalkan $f(t)$ adalah fungsi yang didefinisikan pada $(-\infty, \infty)$ dan misalkan $(f^*)$ menjadi potongan-potongan kontinu di setiap interval parsial hingga kemudian transformasi Fourier Multiplikatif dari double turunan multiplikatif adalah

$$\digamma_m\{f^{**}(t)\} = F_m(p)^{(-p^2)}$$

Bukti: Dari definisi didapatkan

$$\digamma_m\{f^*(t)\} = e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} \ln \left\{ \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)}{f(t)} \right\}^{\frac{1}{h}} dt}$$

$$\digamma_m\{f^*(t)\} = e^{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t+h)\, e^{ip(t+h)} e^{-iph} dt - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt}$$

sekarang masukkan $t + h = y$ dalam integral pertama didapatkan

$$\digamma_m\{f^*(t)\} = e^{\lim_{h\to 0} \frac{e^{-iph}1}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(y)\, e^{ipy} dy - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt}$$

Dengan mengubah variabel $y \to t$ didapatkan

$$\digamma_m\{f^*(t)\} = e^{(-ip)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt}$$

Sekarang jika diganti $f$ dan $f^*$ dengan $f^*$ dan $f^{**}$ masing-masing maka Transformasi Fourier multiplikatif dari $f^{**}$ adalah sama dengan

$$\digamma_m\{f^{**}(t)\} = e^{(-ip)^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(t) e^{ipt} dt \right\}}$$
$$\digamma_m\{f^{**}(t)\} = F_m(p)^{(-p^2)}$$

Ini membuktikan teorema

Jika metode induksi digunakan untuk teorema ini, didapatkan menggeneralisasikan transformasi Fourier multiplikatif fungsi $(f^{*2n})$.

Hasil: Misalkan $f, f^{*2} \ldots\ldots\ldots f^{*2(n-1)}, f^{*2n}$ menjadi fungsi kontinu sepotong-sepotong pada interval $(-\infty, \infty)$ maka

$$\digamma_m\{f^{*2n}(t)\} = F_m(p)\}^{(-p^2)^n}, Dimana\ n = 1,3,5 \ldots$$
$$= F_m(p)\}^{(p^2)^n}, Dimana\ n = 2,4,6 \ldots.$$

**Teorema 3.9**: Misalkan $f_1$ dan $f_2$ adalah fungsi kontinu definit positif maka

$$f_1 = f_2 \text{ jika dan hanya jika } \digamma_m\{f_1\} = \digamma_m\{f_2\}$$

**Definisi 3.2 :** Jika $\digamma_m(p)$ adalah transformasi Fourier multlipikatif dari fungsi kontinu $f$, itu adalah

$$\digamma_m(f) = F$$

Kemudian $\digamma_m{}^{-1}(F)$ disebut sebagai invers transformasi Fourier multiplikatif dari F.

**Teorema 3.10**: Transformasi Fourier multiplikatif terbalik adalah linier multiplikatif. Dengan kata lain, jika $c_1,\ c_2$ adalah eksponen sebarang dan $f_1,\ f_2$ adalah dua fungsi kontinu yang diberikan yang memiliki transformasi Fourier multiplikatif $F_1,\ F_2$ berturut-turut, maka

$$\digamma_m{}^{-1}\{F_1{}^{c_1}F_2{}^{c_2}\} = \digamma_m{}^{-1}\{F_1\}^{c_1}\digamma_m{}^{-1}\{F_2\}^{c_2}$$

**Aplikasi Untuk Persamaan Differensial Multiplikatif**

Berdasarkan persamaan sebelumnya didapatkan rumus berikut untuk transformasi Fourier multiplikatif dari derivative Multiplikatif

$$\begin{aligned}\digamma_m\{f^{*2n}(t)\} &= F_m(p)\}^{(-p^2)^n}, Dimana\ n = 1,3,5\ \ldots\\ &= F_m(p)\}^{(p^2)^n}\quad , Dimana\ n = 2,4,6\ \ldots.\end{aligned}$$

Rumus ini mencakup transformasi Fourier multiplikatif fungsi $f, f^{*2}\ \ldots\ldots\ldots . f^{*2(n-1)}$, jadi dapat digunakan untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial dengan waktu differensial genap saja, terutama dari tipe multiplikatif dengan eksponensial konstan. didapatkan solusi dengan menerapkan Fourier multiplikatif mengubah ke kedua sisi persamaan dari soal-soal ini. Batasannya Metode ini adalah pembaca dapat menerapkannya pada persamaan differensial multiplikatif yang dimilikinya bahkan waktu differensial saja.

Sebagai ilustrasi diterapkan cara di atas pada persamaan diferensial multiplikatif berikut

a) $(y^{**})(y)^2 = e^{\delta(t)}$

Bukti: Menggunakan definisi aplikasi transformasi Fourier yang telah diperoleh didapatkan ;

$$\digamma_m\{y^{*2}\}\digamma_m\{y^2\} = \digamma_m\{e^{\delta(t)}\}$$

$$y(t) = \digamma_m{}^{-1}\left\{e^{\left[\frac{2(2)}{p^2+2^2}\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt}\ln e^{\left[\frac{2(2)}{p^2+2^2}\right]}dt}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y(t) = \left\{e^{e^{-2|t|}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

**Metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif**

Metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif orde empat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal di $x_{i+1} \in [a,b], i = 3,4,\ldots,n-1$ dengan nilai permulaan $x_0,\ldots,x_3, w_0,\ldots,w_3$ dinyatakan sebagai

$$w_{i+1}^{[p]} = w_i((f_i)^{55}(f_{i-1})^{-59}(f_{i-2})^{37}(f_{i-3})^{-9})^{\frac{h}{24}}$$

$$w_{i+1}^{[c]} = w_i((f_{i+1})^{9}(f_i)^{19}(f_{i-1})^{-5}(f_{i-2}))^{\frac{h}{24}}$$

$$w_{i+1} = w_{i+1}^{[c]}$$

Eror terpotong lokal metode Adams Bashfort Moulton Multiplikatif orde empat di $x_{i+1}$ dinotasikan dengan $T_{i+3}^{[p]}$ dan $T_{i+3}^{[c]}$

$$T_{i+3}^{[p]} = \exp\left(y^{(4)}(\varepsilon_i)h^4 \int_0^1 C(s+3,4)ds\right) = exp\left(\frac{251}{720} y(4)(\varepsilon_i)h^4\right).$$

$$T_{i+3}^{[c]} = \exp\left(y^{(4)}(\delta_i)h^4 \int_{-1}^0 C(s+3,4)ds\right) = exp\left(\frac{-19}{720} y(4)(\delta_i)h^4\right).$$

Untuk $\varepsilon_i \in (x_{i-3}, x_{i+1})$ dan $\delta_i \in (x_{i-2}, x_{i+1})$

**Tabel dan Grafik Simulasi Numerik**

Misalkan diberikan suatu contoh masalah nilai awal Persamaan Diferensial orde satu.

$$y'(x) = g(x, y(x)) = -y(x) + x + 1, \qquad y(0) = 1$$

Ditentukan penyelesaian masalah nilai awal Persamaan Diferensial di $x \in [0,2]$, dengan x adalah besaran waktu. Masalah nilai awal Persamaan Biasa Diferensial tersebut bisa dinyatakan ke bentuk masalah nilai awal Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif orde satu

$$y^*(x) = f(x, y(x)) = exp\left(\frac{-y(x) + x + 1}{y(x)}\right), \qquad y(0) = 1$$

Didapatkan hasil simulasi berupa tabel penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa dan Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif orde satu sebagai berikut

**Tabel 1.** Solusi $\boldsymbol{y'(x) = g(x, y(x)) = -y(x) + x + 1,\ \ y(0) = 1, x \in [0, 2]}$

| x | [Maple's numeric solution] | [R-K 4th Ord.] | [Error] | [Euler] | [Error] | [5th-Ord. Taylor] | [Error] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 1. | 0. | 1. | 0. | 1. | 0. |
| 0.4000 | 1.070 | 1.070 | 0.0004000 | 1. | 0.07000 | 1.070 | 0. |
| 0.8000 | 1.249 | 1.249 | 0.0004362 | 1.160 | 0.08900 | 1.249 | 0. |
| 1.200 | 1.501 | 1.501 | 0.0003020 | 1.416 | 0.08500 | 1.501 | 0. |
| 1.600 | 1.802 | 1.802 | 0.000007138 | 1.730 | 0.07240 | 1.802 | 0. |
| 2. | 2.135 | 2.135 | 0.0004160 | 2.078 | 0.05724 | 2.135 | 0. |

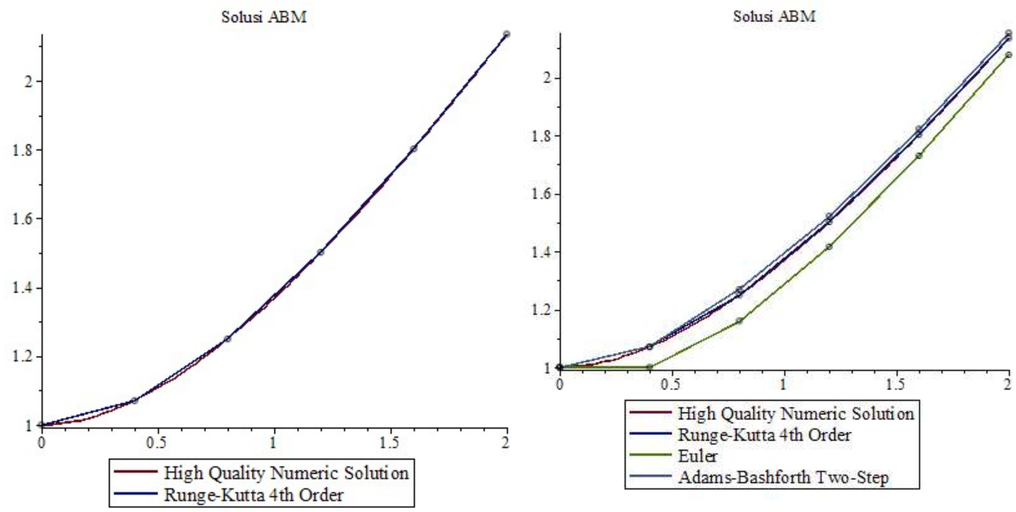
**Tabel 2.** Solusi $\boldsymbol{y^*(x) = f(x, y(x)) = exp\left(\frac{-y(x)+x+1}{y(x)}\right), \quad y(0) = 1, x \in [0, 2]}$

| x | [Maple's numeric solution] | [R-K 4th Ord.] | [Error] | [Euler] | [Error] | [5th-Ord. Taylor] | [Error] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 1. | 0. | 1. | 0. | 1. | 0. |
| 0.4000 | 1.046 | 1.046 | 0.0001256 | 1.054 | 0.008134 | 1.046 | 0. |
| 0.8000 | 1.079 | 1.079 | 0.0002749 | 1.093 | 0.01413 | 1.079 | 0. |
| 1.200 | 1.102 | 1.102 | 0.0003823 | 1.121 | 0.01948 | 1.102 | 0. |
| 1.600 | 1.119 | 1.119 | 0.0004444 | 1.142 | 0.02317 | 1.119 | 0. |
| 2. | 1.132 | 1.132 | 0.0002578 | 1.157 | 0.02528 | 1.132 | 0. |

Berdasarkan Tabel 1 dan Table 2 diketahui bahwa nilai eror yang diperoleh kedua metode tersebut mendekati nol.Selain itu, eror yang dihasilkan metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif orde empat lebih besar dibandingkan eror yang dihasilkan metode

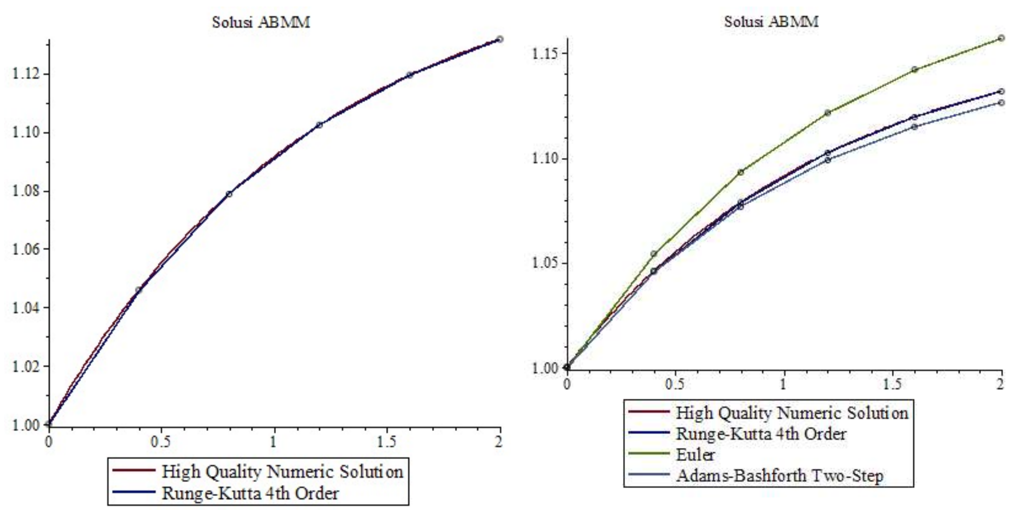
Adams Bashforth-Moulton orde empat di sebagian besar titik $x \in [0,2]$. Oleh karena itu dengan banyak langkah yang sama, akurasi hasil metode Adams Bashforth Moulton orde empat lebih baik dibandingkan metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif orde empat dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial di titik tersebut.

Didapatkan hasil simulasi berupa grafik penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif orde satu sebagai berikut




**Gambar 1.** Solusi $y'(x) = g\big(x, y(x)\big) = -y(x) + x + 1,\ \ y(0) = 1, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}]$

Gambar 1 merupakan grafik hasil simulasi Adam Bashforth Moulton (ABM). Sedangkan Gambar 2 merupakan grafik hasil simulasi Adam Bashforth-Moulton Multiplikatif (ABMM).




**Gambar 2.** Solusi $\boldsymbol{y'(x) = f\big(x, y(x)\big) = exp\left(\frac{-y(x)+x+1}{y(x)}\right),\ \ y(0) = 1, x \in [0, 2]}$

Tabel dan Grafik diatas adalah hasil simulasi numeric yang di hasilkan dari metode Adams Bashforth Moulton Multiplikatif. Hasil tersebut mengindikasikan bahwa eror yang diperoleh metode tersebut mendekati 0. Dapat diketahui bahwa akurasi dan efisiensi hasil yang diperoleh metode tersebut efektif dalam menyelesaikan masalah nilai awal Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif orde satu.

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa Transformasi Fourier Multiplikatif bisa menjadi alternative solusi untuk mencari penyelesaian Persamaan Diferensial Multiplikatif. Kemudian, metode Adam Bashforth Moulton Multiplikatif cukup efektif untuk digunakan dalam menyelesaikan Persamaan Diferensial Multiplikatif Biasa orde satu.

## 5. REFERENSI

Aarif Hussain Bhat, J. M. (2019). Multiplicative Fourier Transform and its Applications to Multiplicative Differential Equations. *Journal of Computer and Mathematical Sciences, 10*(2), 375-383. Diunduh di http://www.compmath-journal.org/dnload/Aarif-Hussain-Bhat-Javid-Majid-Tafazul-Rehman-Shah-Imtiyaz-Ahmad-Wani4-and-Renu-Jain5/CMJV10I02P0375.pdf, pada 17 Mei 2021.

Agamirza E. Bashirov, E. M. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 36–48. Diunduh di https://core.ac.uk/download/pdf/81954511.pdf, pada 25 September 2021.

Agarwal, M. (2012). No Title Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology, 4*(3), 78–96. Diunduh di https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.942.8134&rep=rep1&type=pdf , pada 21 September 2021.

Aktöre, M. R. (2015). *The Runge–Kutta method in geometric multiplicative calculus.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Dedeturk, N. Y. (2020). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *AIMS Mathematics, 6*(4), 3393–3409. Diunduh di http://aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2021203?viewType=HTML, pada 12 Agustus 2021.

Gurefe, E. M. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 425–439. Diunduh di https://dl.acm.org/doi/10.1007/s11075-010-9437-2, pada 9 September 2021.

Mugiyono, S. d. (2011). *Persamaan Diferensial Biasa.* Yogyakarta: SUKA-Press UIN Sunan Kalijaga.

Mustafa Riza, A. O. (2009). Riza, M., A. OzyapicMultiplicative finite difference methods. *Q. Appl. Math.*, 745–754. Diunduh di https://www.semanticscholar.org/paper/Multiplicative-finite-difference-methods-Riza-%C3%96zyapici/00b6aa99fb556a35f8c5ea6f4ca73aafdf6f7655, pada 6 Agustus 2021.

Numan Yalcin, E. C. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. *Optik*, 9984-9995. Diunduh di https://scholar.google.sk/citations?user=YARXSdoAAAAJ&hl=en, pada 5 Juli 2021.

Setiawan, A. (2014). *Metode Adams Bashforth–Moulton Multiplikatif Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Multiplikatif.* Surakarta: Skripsi, Tidak Diterbitkan, Jurusan Sains Matematika F-MIPA UNS. Diunduh di https://digilib.uns.ac.id/dokumen/detail/42692, pada 6 September 2021.

Walter Gander, M. J. (2014). *Scientific Computing An Introduction using Maple and MATLAB.* Geneva and Zurich: Springer.