Jurnal Derivat, Volume 9 No.2 Desember 2022
ISSN: 2549-2616

Modifikasi Metode Iterasi Behl Tanpa Turunan Kedua Dengan Orde Konvergensi Optimal

Wartono[1)], Mohammad Soleh[2)]
[1,2] Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
email: [1]wartono@uin-suska.ac.id
[2]msoleh@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode iterasi Behl merupakan metode iterasi berorde konvergensi tiga dengan tiga evaluasi fungsi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Artikel ini membahas modifikasi metode iterasi Behl dengan mereduksi turunan kedua menggunakan fungsi hiperbolik. Tujuan dari modifikasi ini adalah untuk meningkatkan orde konvergensi dan tetap mempertahankan jumlah evaluasi fungsi. Hasil kajian menunjukkan bahwa metode iterasi baru mempunyai orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1,5874$. Simulasi numerik diberikan dengan menggunakan enam fungsi bernilai real untuk menguji peformasi modifikasi metode Behl yang meliputi orde konvergensi komputasi, jumlah iterasi, evaluasi fungsi, dan galat mutlak. Indikator-indikator dari metode iterasi tersebut dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, seperti: metode Newton, metode Chun-Kim, metode Newton-Steffensen, dan metode Behl. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa peformasi modifikasi metode Behl lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Kata Kunci: Metode Behl, orde konvergensi, indeks efisiensi, evaluasi fungsi, simulasi numerik.

Abstract

Behl iterative method is a third-order of iterative method with three evaluation of functions for solving nonlinear equation. This paper discuss a modification of Behl iterative method by reduced second derivative using hiperbolic function. The aim of this modification is to improve the order of convergence by keep the number of functional evalutions. The result od study shows that the new iterative method has a fourth-order of convergence and requires three evalualions of funtion with efficiency index as $4^{1/3} \approx 1,5874$. Numerical simulation is given by using six real functions to test the performance of the modification of Behl method which includes number of iterations, evaluation of function, and absolute error. The performance of new method is compared with Newton method, Newton-Steffensen, Chun-Kim method, and Behl's method. The result of numerical simulation shows that the performance of the modification of Behl's method is better than others.

Keyword: *Behl method, order of convergence, efficiency index, evaluation of function, numerical simulation*

1. PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear merupakan representasi matematis dari persoalan-persoalan pada bidang sains dan teknologi (Burden & Faires, 2011; Chapra & Canale, 2015). Permasalahan matematika yang sering dihadapi biasanya dalam bentuk penyelesaian persamaan nonlinier yang rumit sehingga sulit untuk memperoleh solusi penyelesaian eksak yang sejatinya. Oleh sebab itu, solusi yang sering digunakan untuk menyelesaikannya dengan metode numerik yaitu metode untuk mencari akar-akar dari persamaan nonlinier.

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

dengan $f : D \in \Re \rightarrow \Re$ dan D adalah interval terbuka.

Teknik yang paling umum untuk mengkonstruksi metode iterasi adalah menggunakan ekspansi deret Taylor dalam bentuk

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2!} + \cdots. \tag{2}$$

Ekspansi deret Taylor orde satu menghasilkan metode iterasi yang cukup populer dan banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang dikenal dengan nama metode Newton yang ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0. \tag{3}$$

Metode Newton mempunyai orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ sehingga indeks efisiensinya sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}4142$. Sedangkan pemotongan deret Taylor orde menghasilkan metode iterasi klasik berode tiga yaitu: metode Halley (Hernandez, 1991); (Scavo & Thoo, 1995), metode Euler atau metode Halley Irasional (Melman, 1997), dan metode Chebyshev (Amat et al., 2008).

Selain menggunakan pendekatan ekspansi deret Taylor, beberapa pendekatan digunakan untuk mengkontruksi metode iterasi berorde konvergensi tiga, diantaranya: tafsiran geometrik (Melman, 1997), fungsi hiperbolik (Amat et al., 2003), fungsi parabolik (Amat et al., 2008; Sharma, 2007), fungsi kuadratik (Chun, 2007), kelengkungan kurva (Chun & Kim, 2010), metode dekomposisi Adomian (Chun, 2005), metode dekomposisi Adomian termodifikasi (Abbasbandy, 2003), pertubasi homotopi (Javidi, 2007; Noor, 2010), metode pertubasi homotopi termodifikasi (Abbasbandy, 2006; Rafiq & Javeria, 2009), dan metode variasi iterasi (Shah & Noor, 2014).

Selanjutnya, Behl et al., (2012) mengkontruksi keluarga metode iterasi satu titik menggunakan kombinasi fungsi eksponensial dan linear dalam bentuk

$$y(x) = e^{p(x - x_n)}(A(x - x_n) + B), \tag{4}$$

yang menghasilkan metode iterasi berorde konvergensi tiga yang diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{4f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}{4f'(x_n)^2 - 3f(x_n)f''(x_n)}\right). \tag{5}$$

Metode iterasi klasik berorde konvergensi tiga selalu melibatkan tiga evalasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ sehingga indeks efisiensinya sebesar $3^{1/3} \approx 1{,}4422$.

Berdasarkan (Traub, 1964), bahwa performa metode iterasi diukur oleh indeks efisiensi yang dihitung menggunakan rumus

$$I = p^{1/d}, \tag{6}$$

dengan p adalah orde konvergensi metode iterasi dan d adalah banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan.

Menurut Kung & Traub (1974), jika sebuah metode iterasi menggunakan n buah titik dengan orde konvergensi p dan melibatkan d evaluasi fungsi, maka metode iterasi akan optimal jika memenuhi hubungan $p = 2^n$ dan $d = n + 1$, sehingga indeks efisiensi suatu metode iterasi dengan orde konvergensi optimal dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$I = \left(2^n\right)^{1/(n+1)}. \tag{7}$$

Suatu metode iterasi dengan orde konvergensi yang tinggi akan memberikan dampak kepada sedikitnya penggunaan jumlah iterasi dan sekaligus menghasilkan akurasi yang cukup baik. Oleh karena itu, performasi suatu metode iterasi sangat dipengaruhi oleh orde konvergensi yang mana semakin tinggi orde konvergensi, maka performasi metode iterasi semakin baik. Sebaliknya pada suatu metode iterasi, semakin rendah orde konvergensi, maka performasi metode iterasi akan semakin buruk. Oleh karena itu, orde konvergensi dan evaluasi fungsi mempunyai peranan yang sangat penting dalam menentukan tingkat efisiensi suatu metode dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinear, maka usaha-usaha untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi menjadi perhatian yang serius.

Beberapa modifikasi telah dilakukan oleh peneliti dengan mengkontruksi kembali suatu metode iterasi. Selain itu, keterlibatan derivatif atau turunan orde tinggi dan kompleksitas fungsi yang dievaluasi juga menjadi pertimbangan di dalam melakukan modifikasi metode iterasi.

Selanjutnya, pada artikel ini dilakukan modifikasi metode iterasi berorde tiga yang dikemukan oleh Behl dkk ((Behl et al., 2012)) dengan mereduksi turunan kedua menggunakan fungsi hiperbolik (Chun, 2007; Xiaojian, 2008; Yu & Xu, 2012; (Sholeh & Wartono, 2019), dan diprediksi bahwa orde konvergensi yang dihasilkan lebih tinggi dengan indeks efisiensi optimal dibandingkan dengan orde konvergensi dari metode iterasi sebelumnya.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur (*library research*) yang dilakukan melalui tiga tahapan sebagai berikut. Pada tahap pertama, sebuah metode iterasi dikonstruksi dengan cara memodifikasi metode iterasi Behl dkk dan sekaligus menambahkan dua parameter real β dan λ. Selanjutnya, turunan kedua yang muncul pada metode iterasi tersebut direduksi menggunakan pendekatan fungsi hiperbolik. Untuk memberikan peluang peningkatan orde konvergensi, maka bentuk eksplisit turunan kedua ditambahkan satu parameter bernilai real θ. Tahap kedua menentukan orde konvergensi dari metode iterasi menggunakan ekspansi deret Taylor, dan sekaligus menentukan nilai-nilai parameter untuk menghasilkan orde konvergensi yang optimal. Tahap terakhir mengimplementasikan metode iterasi yang dihasilkan pada enam fungsi real dengan tujuan untuk menguji performasi metode iterasi menggunakan perangkat lunak MAPLE 13. Ukuran-ukuran peformasi yang diuji yaitu: jumlah iterasi, jumlah evaluasi fungsi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (*computational order of convergence* (COC)), dan galat mutlak . Kemudian, ukuran-ukuran performasi dari metode iterasi tersebut dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, yaitu: metode Newton, Chun-Kim, Newton-Steffensen, dan Behl.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Modifikasi Metode Behl

Untuk mengkontruksi metode iterasi baru, pertimbangkan kembali metode Behl berorde konvergensi tiga (Behl et al., 2012) yang diberikan pada Persamaan (5) dengan melibatkan dua konstanta β dan λ dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f'(x_n)^2 - \beta f(x_n)f''(x_n)}{4f'(x_n)^2 - 3\lambda f(x_n)f''(x_n)} \cdot \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right). \tag{8}$$

Persamaan (8) masih memuat turunan kedua. Oleh karena itu, untuk menghindari penggunaan turunan kedua, maka turunan kedua pada Persamaan (8) direduksi menggunakan fungsi hiperbolik.

Pertimbangkan kembali fungsi hiperbola sebagai berikut

$$ay(x) + xy(x) + bx + c = 0\,. \tag{9}$$

Turunan pertama dan kedua Persamaan (9) diberikan oleh

$$ay'(x) + xy'(x) + y(x) + b = 0\,, \tag{10}$$

dan

$$ay''(x) + y'(x) + xy''(x) + y'(x) = 0\,. \tag{11}$$

Persamaan (11) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$y''(x) = -\frac{2y(x)}{a+x}\,. \tag{12}$$

Persamaan (12) merupakan bentuk turunan kedua yang melibatkan konstanta a. Konstanta a dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan yang berasal dari Persamaan (9) dan (10) dengan melibatkan titik x_n, w_n dan w_n merupakan metode iterasi Newton. Jika diasumsikan bahwa $y(x) = f(x)$, maka $y(x_n) = f(x_n)$, dan $y(w_n) = f(w_n)$, maka diperoleh

$$af(x_n) + x_n f(x_n) + bx_n + c = 0\,, \tag{13.a}$$

$$af'(x_n) + x_n f'(x_n) + f'(x_n) + b = 0\,, \tag{13.b}$$

$$af(w_n) + w_n f(w_n) + bw_n = 0\,. \tag{13.c}$$

Penyelesaian Persamaan (13.a) – (13.c) memberikan nilai konstanta a dalam bentuk

$$a = -\frac{(f(w_n) - f(x_n))w_n + (x_n - w_n)x_n f'(x_n)}{(x_n - w_n)f'(x_n) + f(w_n) - f(x_n)}\,,$$

sehingga dengan mensubstitusikan kembali nilai konstanta a ke Persamaan (12), maka diperoleh bentuk eksplisit turunan kedua yang diberikan oleh

$$f''(x_n) = -\frac{2(x_n - w_n)f^2(x_n) + \left(f(w_n) - f(x_n)\right)f'(x_n)}{(x_n - w_n)\left(f(x_n) - f(w_n)\right)}\,. \tag{14}$$

Selanjutnya dengan menggunakan bentuk Newton

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \tag{15}$$

maka bentuk turunan kedua pada Persamaan (15) dengan menambahkan satu parameter real θ ditulis kembali menjadi

$$f''(x_n) = -\frac{2f'^2(x_n)f(w_n)}{f(x_n)\left(\theta f(x_n) - f(w_n)\right)}\,. \tag{16}$$

Persamaan (16) merupakan bentuk eksplisit turunan kedua dengan satu parameter real. Kemudian, substitusikan Persamaan (16) ke Persamaan (8), dan dengan penyederhanaan persamaan memberikan bentuk metode iterasi dua titik yang secara lengkap ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n) - (2\theta + \beta)f(w_n)}{2f(x_n) - (2\theta + 3\lambda)f(w_n)} \cdot \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right). \tag{17}$$

Persamaan (17) merupakan modifikasi metode iterasi Behl yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f(w_n)$ dan $f'(x_n)$. Keterlibatan tiga parameter θ, β, dan λ pada metode iterasi memberikan peluang munculnya varian metode iterasi, baik berorde konvergensi tiga, maupun empat, bahkan dapat juga muncul sebagai sebuah persamaan metode iterasi klasik. Berikut ini diberikan beberapa metode klasik dengan mengambil hubungan β, λ, dan θ.
Untuk $\beta = -2\theta$, $\lambda = -2/3\theta$, $\theta \in R$, Persamaan (17) menjadi metode Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Untuk $\beta = -2(1+\theta)$, $\lambda = -2/3\theta$, $\theta \in R$, Persamaan (17.b) menjadi metode Potra-Ptak,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(w_n)}{f'(x_n)}.$$

Untuk $\beta = -2\theta$, $\lambda = 2/3(1-\theta)$, $\theta \in R$, Persamaan (17.b) menjadi metode Newton-Steffensen,

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(w_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Untuk $\beta = 2(1-\theta)$, $\lambda = 2/3(2-\theta)$, $\theta \in$ R, Persamaan (17.b) menjadi metode Ostrowski,

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n) - f(w_n)}{f(x_n) - 2f(w_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3.2. Orde Konvergensi

Berikut ini akan ditentukan orde konvergensi dari Persamaan (17) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.

Teorema 1. Asumsikan bahwa fungsi f memiliki turunan dan f memiliki akar penyelesaian $\alpha \in I$. Jika nilai awal x_n cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada pada Persamaan (17) memiliki orde konvergensi empat untuk $\beta = 2(1-\theta)$ dan $\lambda = 2/3(2-\theta)$ dan memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 + c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{18}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengekspansi fungsi f di sekitar α, diperoleh:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \cdots, \tag{19}$$

Sehingga untuk $x = x_n$, diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots. \qquad (20)$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)} e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)} e_n{}^3 + \frac{\mathrm{O}(e_n{}^4)}{f'(\alpha)} \right),$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)), \qquad (21)$$

dengan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, j = 2,3,\ldots, k$

Selanjutnya dengan cara yang sama, diperoleh $f'(x_n)$ sebagai berikut:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)). \qquad (22)$$

Berdasarkan Persamaan (21) dan Persamaan (22) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (22)$$

sehingga dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$, maka Persamaan (17) menjadi:

$$w_n = \alpha + c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (23)$$

dan kemudian, berdasarkan ekspansi deret Taylor disekitar α, maka $f(w_n)$ dapat dibentuk menjadi:

$$f(w_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(w_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(w_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(w_n - \alpha)^3 + \cdots$$

dan dengan menggunakan Persamaan (23), maka

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\right). \qquad (24)$$

Dengan menggunakan Persamaan (21) dan (24), maka diperoleh masing-masing

$$\begin{aligned}(2\theta + \beta)f(w_n) - 2f(x_n) = f'(\alpha)\big(&-2e_n + (-2 + 2\theta + \beta)c_2 e_n^2 \\ &+ \left((-2\beta - 4\theta)c_2^2 + (-2 + 2\beta + 4\theta)c_3\right) \\ &+ \left((5\beta + 10\theta)c_2^3 + (-7\beta - 14\theta)c_2c_3 + (-2 + 3\beta + 6\theta)c_4\right)e_n^4 \\ &+ O(e_n^5) \qquad (25)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(2\theta + 3\lambda)f(w_n) - 2f(x_n) = f'(\alpha)\big(&-2e_n + (-2 + 2\theta + 3\lambda)c_2 e_n^2 \\ &+ \left((-6\lambda - 4\theta)c_2^2 + (-2 + 6\lambda + 4\theta)c_3\right) \\ &+ \left((15\lambda + 10\theta)c_2^3 + (-21\lambda - 14\theta)c_2c_3 + (-2 + 9\lambda + 6\theta)c_4\right)e_n^4 \\ &+ O(e_n^5) \qquad (26)\end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{(2\theta+\beta)f(w_n)-2f(x_n)}{(2\theta+3\lambda)f(w_n)-2f(x_n)}=1-\frac{1}{2}(\beta-3\lambda)c_2e_n+\left(\left(\frac{9}{4}\lambda^2+\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{3}{4}\beta-\frac{9}{2}\right)\lambda\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{9}{2}\beta-\frac{1}{2}\beta\theta\right)c_2^2+(3\lambda-\beta)c_3\right)e_n^2+\cdots+O(e_n^5) \qquad (27)$$

Selanjutnya dengan menggunakan (21), (22), (27) dan $x_{n+1}=\alpha+e_{n+1}$, dan $x_n=\alpha+e_n$, maka persamaan galat dari metode iterasi (17) diberikan oleh

$$e_{n+1}=\frac{1}{2}(2+\beta-3\lambda)c_2e_n^2$$
$$+\left(\left(-\frac{9}{4}\lambda^2+\frac{3}{4}(\beta-2\theta+8)\lambda+\frac{1}{2}\beta\theta-2\beta-2\right)c_2^2+(2+\beta-3\lambda)c_3\right)e_n^3$$
$$+\left(\left(-\frac{27}{8}\lambda^3+\frac{9}{8}(\beta-4\theta+14)\lambda^2+\left(\frac{1}{4}(6\theta-21)\beta-\frac{3}{2}(\theta^2+7\theta-13)\right)\lambda\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(\theta^2-7\theta+13)\beta\right)c_2^3+\left(-9\lambda^2+\lambda(3\beta-6\theta+21)\right)c_2c_3+\left(3+\frac{3}{2}\beta-\frac{9}{2}\lambda\right)c_4\right)e_n^4$$
$$+O(e_n^5) \qquad (28)$$

Persamaan (28) memuat tiga parameter real, β, θ, dan λ yang memungkinan orde konvergensi metode iterasi dapat ditingkatkan. Oleh karena itu, berdasarkan Persamaan (28), dapat di peroleh

$$\left.\begin{aligned}2+\beta-3\lambda&=0\\-9\lambda^2+(3\beta-6\theta+24)\lambda+2\beta\theta-8\beta-8&=0\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Nilai untuk β dan λ dalam θ ditentukan dengan menyelesaikan sistem Persamaan (29), maka diperoleh

$$\beta=2(1-\theta),\ \text{dan}\ \lambda=2/3(2-\theta). \qquad (30)$$

Substitusikan kembali β dan λ ke Persamaan (28), maka diperoleh persamaan galat untuk metode iterasi (17) dalam bentuk

$$e_{n+1}=(c_2^2-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5). \qquad ■(31)$$

Berdasarkan Persamaan (31), metode iterasi pada Persamaan (17) memiliki orde konvergensi empat untuk $\beta=2(1-\theta)$ dan $\lambda=2/3(2-\theta)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa Teorema 1 terbukti. Berdasarkan hubungan nilai $\beta=2(1-\theta)$ dan $\lambda=2/3(2-\theta)$, maka metode iterasi berorde empat dari Persamaan (17) dapat ditulis menjadi

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)-f(w_n)}{f(x_n)-2f(w_n)}\cdot\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right). \qquad (32)$$

Berdasarkan bentuk persamaan metode iterasi yang melibatkan tiga parameter real β, λ, dan θ, maka metode iterasi dapat memuncul bentuk metode iterasi lainnya dengan mengambil sembarang nilai parameter.

Indeks efisiensi dari metode iterasi pada Persamaan (17) dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya yang diberikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Perbandingan Indeks Efisiensi

No	Metode Iterasi	Orde	Evaluasi Fungsi	Indeks Efisiensi
1.	Newton	2	2	$2^{1/2} \approx 1,4142$
2.	Chun-Kim	3	3	$3^{1/3} \approx 1,4224$
3.	Newton-Steffensen	3	3	$3^{1/3} \approx 1,4224$
4.	Metode Iterasi Behl	3	3	$3^{1/3} \approx 1,4224$
5.	Modifikasi Metode Behl	4	3	$4^{1/3} \approx 1,5874$

3.3. Simulasi Numerik

Untuk melihat performasi modifikasi metode Behl (MMB) yang meliputi jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (computational order of convergence (COC)), galat mutlak dengan menggunakan lima fungsi real. Selanjutnya, performasi MMB dibandingkan dengan metode Newton (MN) (Traub, 1964), metode Chun-Kim (MCK) (Chun & Kim, 2010), metode Newton-Steffensen (MNS) (Sharma, 2005), dan metode Iterasi Behl (MIB) (Behl et al., 2012). Perhitungan komputasi untuk menentukan performasi metode-metode yang dibandingkan dilakukan dengan menggunakan perangakat Maple 13 dengan 800 digit dan iterasi akan berhenti pada saat memenuhi rumusan

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon \tag{33}$$

dengan ε adalah ketelitian galat relatif dan pada simulasi numerik ini digunakan $\varepsilon = 10^{-20}$. Sedangkan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC) menggunakan rumus sebagai berikut

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+2} - \alpha)/(x_{n+1} - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k. \tag{34}$$

Selanjutnya, penerapan komputasi terhadap fungsi-fungsi real dengan mengambil nilai awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan, yang mana akar-akar eksaknya ditampilkan sebanyak 20 digit desimal. Adapun fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$, $\alpha \approx 0{,}11183255915896296483$,

$f_2(x) = e^x - 4x^2$, $\alpha \approx 4{,}\ 30658472822069929833$,

$f_3(x) = \cos(x) - x$, $\alpha \approx 0{,}\ 73908513321516064165$,

$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha \approx 1{,}36523003414096845760$,

$f_5(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha = -1{,}000000000000000$.

Orde konvergensi, selain ditentukan dengan menggunakan pendekatan deret Taylor, dapat juga dihitung dengan melibatkan nilai-nilai galat, yang biasa disebut orde konvergensi komputasi (*computational order of convergence* (COC)) yang rumusannya diberikan pada Persamaan (34). Selanjutnya, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi dengan menggunakan rumusan yang diberikan pada Persamaan (34) dari metode iterasi yang dibandingkan diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Perbandingan COC dan jumlah iterasi untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

$f(x)$	x_0	MN	MCK	MNS	MIB	MMIB
$f_1(x)$	–0,2	1,9999	2,9999	2,9999	3,0017	3,9963
	0,3	1,9999	3,0000	3,0000	3,0002	3,9999
$f_2(x)$	4,0	1,9999	3,0000	3,0000	3,0002	3,9995
	4,5	1,9999	2,9988	2,9995	3,0001	4,0000
$f_3(x)$	0,1	1,9999	3,0000	3,0000	3,0000	3,9991
	1,5	1,9999	2,9999	2,9994	3,0000	3,9998
$f_4(x)$	1,0	1,9999	3,0000	3,0020	3,0000	3,9998
	2,0	1,9999	2,9999	3,0000	3,0000	3,9995
$f_5(x)$	–1,5	2,0000	3,0000	2,9990	3,0000	4,0001
	0,0	2,0000	2,9967	3,0059	3,0004	4,0019

Berdasarkan Tabel 2, modifikasi metode Behl memiliki COC ≈ 4. Orde konvergensi yang diperoleh semakin menegaskan bahwa orde metode baru tersebut adalah empat.

Salah satu ukuran performasi suatu metode iterasi pada proses menghampiri akar persamaan nonlinear adalah banyaknya iterasi yang digunakan. Metode iterasi dikatakan lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, jika banyaknya iterasi yang digunakan lebih sedikit. Jumlah iterasi ini berkaitan secara langsung dengan penggunaan evaluasi fungsi. Suatu metode iterasi yang menggunakan iterasi sedikit, maka evaluasi fungsi yang digunakan juga sedikit. Perbandingan jumlah iterasi dan evaluasi fungsi dari metode iterasi diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Perbandingan jumlah iterasi dan evaluasi fungsi untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

$f(x)$	x_0	Iterasi					Evaluasi Fungsi				
		MN	MCK	MNS	MIB	MMIB	MN	MCK	MNS	MIB	MMIB
$f_1(x)$	–0,2	6	4	4	3	3	12	12	12	9	9
	0,3	5	4	4	3	3	10	12	12	9	9
$f_2(x)$	4,0	6	4	4	3	3	12	12	12	9	9
	4,5	5	3	3	3	3	10	9	9	9	9
$f_3(x)$	0,1	5	4	4	4	3	10	12	12	12	9
	1,5	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9
$f_4(x)$	1,0	5	4	4	3	3	10	12	12	9	9
	2,0	6	4	4	3	3	12	12	12	9	9
$f_5(x)$	–1,5	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9
	0,0	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9

Tabel 3 menunjukkan bahwa modifikasi metode iterasi Behl secara umum memerlukan iterasi yang lebih sedikit. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi tersebut lebih efisien dibandingkan dengan metode iterasi lainnya pada proses menentukan akar-akar pendekatan.

Selain itu, untuk mengukur performasi metode iterasi ditentukan dengan menentukan akurasi metode iterasi yang dihitung pada sejumlah evaluasi fungsi tertentu. Pada penelitian ini, ukuran akurasi yang digunakan adalah nilai galat mutlak yang dihitung berdasarkan total penggunaan evaluasi fungsi (*total number of functional evaluations*/ TNFE) sebanyak duabelas evaluasi fungsi.

Pada saat menggunakan TNFE sebesar 12, suatu metode iterasi yang melibatkan dua evaluasi fungsi, maka galat mutlak dihitung pada iterasi ke-6, sedangkan metode iterasi yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, nilai galat mutlak dihitung pada iterasi ke-4. Nilai-nilai galat mutlak dari beberapa metode iterasi diberikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Perbandingan galat mutlak untuk TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MCK	MNS	MIB	MMIB
$f_1(x)$	–0,2	1,9116(e–18)	1,4395(e–40)	1,1234(e–15)	4.1542(e–31)	2,4910(e–41)
	0,3	1,1277(e–21)	2,1598(e–43)	2,1608(e–18)	2.7504(e–38)	6,7783(e–49)
$f_2(x)$	4,0	1,2322(e–17)	4,6732(e–31)	5,8707(e–15)	4.5871(e–34)	2,3020(e–40)
	4,5	3,1056(e–27)	9,7577(e–62)	4,4483(e–23)	1.8077(e–37)	5.8304(e–59)
$f_3(x)$	0,1	2,3464(e–23)	1,2555(e–34)	1,7984(e–19)	1.6152(e–20)	1.9623(e–40)
	1,5	3,1900(e–32)	5,6378(e–50)	7,5471e–27)	7.3841(e–18)	1.0370(e–50)
$f_4(x)$	1,0	2,2179(e–22)	1,8142(e–42)	6,1217(e–19)	3.0899(e–29)	3,6023(e–47)
	2,0	1,2356(e–19)	3,7453(e–42)	1,2533(e–16)	1.1805(e–22)	3,9838(e–41)
$f_5(x)$	– 1,5	2,3956(e–33)	1,2344(e–51)	6,7780(e–31)	5.2078(e–14)	2,4358(e–42)
	0,0	4,3887(e–33)	1,8779(e–20)	1,7777(e–24)	2.0976(e–08)	7,3495(e–39)

Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa MMIB memiliki nilai galat yang lebih kecil dibandingkan dengan empat metode lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa metode modifikasi metode iterasi Behl lebih baik dibandingkan empat metode lainnya.

4. KESIMPULAN

Metode Behl dimodifikasi dengan menghilangkan turunan kedua menggunakan fungsi hiperbolik. Untuk memberikan peluang peningkatan orde konvergensi dan sekaligus tetap mempertahankan jumlah evaluasi fungsi, maka pada saat memodifikasi metode iterasi di ditambahkan tiga parameter real β, λ, dan θ. Berdasarkan analisis orde konvergensi, metode iterasi baru memiliki orde onvergensi empat untuk $\beta = 2(1-\theta)$ dan $\lambda = 2/3(2-\theta)$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f(w_n)$ dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$. Selain itu, akibat adanya tiga parameter real tersebut, muncul beberapa metode iterasi klasik, baik berorde konvergensi dua, tiga maupun empat.

Pada simulasi numerik, orde konvergensi metode yang dihitung menggunakan rumusan (34) mempertegas bahwa metode iterasi (17) memiliki orde konvergensi empat sebagaimana diberikan pada Tabel 2. Selain itu, pada Tabel 3 menunjukkan bahwa jumlah iterasi yang dibutuhkan oleh metode iterasi (17) dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinier lebih sedikit dibandingan dengan metode iterasi Newton, metode Chun-Kim, metode Newton-Steffensen, dan metode Behl. Sedangkan Tabel 4 memberikan informasi bahwa modifikasi metode Behl mempunyai akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

5. REFERENSI

Abbasbandy, S. (2003). Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, *145*(2–3), 887–893. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00282-0

Abbasbandy, S. (2006). Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, *172*(1), 431–438. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.02.015

Amat, S., Busquier, S., & Gutiérrez, J. M. (2003). Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *157*(1), 197–205. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00420-5

Amat, S., Busquier, S., Gutierrez, J. M., & Hernandez, M. A. (2008). On the global convergence of Chebyshev's iterative method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *220*, 17–21.

Behl, R., Kanwar, V., & Sharma, K. K. (2012). Another simple way of deriving several iterative functions to solve nonlinear equations. *Journal of Applied Mathematics*, *2012*. https://doi.org/10.1155/2012/294086

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9th ed.). BROOKE/COLE Cengage Learning.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers, 7th Ed* (7th ed.). Mc GrawHill.

Chun, C. (2005). Iterative methods improving newton's method by the decomposition method. *Computers and Mathematics with Applications*, *50*, 1559–1568. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.08.022

Chun, C. (2007). A one-parameter family of third-order methods to solve nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, *189*(1), 126–130. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.058

Chun, C., & Kim, Y. Il. (2010). Several new third-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, *109*(3), 1053–1063. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9359-3

Hernandez, M. A. (1991). A note on Halley's method. *Numerische Mathematik*, *15*(1), 89–90. https://doi.org/10.1016/0097-8493(91)90034-F

Javidi, M. (2007). Iterative methods to nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, *193*(2), 360–365. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.068

Kung, H. T., & Traub, J. F. (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. *Journal of the Association for Computing Mechinary*, *21*(4), 643–651.

Melman, A. (1997). Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods. *SIAM Review*, *39*(4), 728–735.

Noor, M. A. (2010). Iterative methods for nonlinear equations using homotopy perturbation technique. *Applied Mathematics and Information Sciences*, *4*(2), 227–235.

Rafiq, A., & Javeria, A. (2009). Iterative Methods for Solving Nonlinear. *Acta Universitatis Apulensis*, *4*(18), 1–11.

Scavo, T. R., & Thoo, J. B. (1995). On the Geometry of Halley's Method. *The American Mathematical Monthly*, *102*(5), 417–426. https://doi.org/10.1080/00029890.1995.12004594

Shah, F. A., & Noor, M. A. (2014). Variational Iteration Technique and Some Methods for the Approximate Solution of Nonlinear Equations. *Applied Mathematics & Information Sciences Letters*, *2*(3), 85–93. https://doi.org/10.12785/amisl/020303

Sharma, J. R. (2005). A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, *169*(1), 242–246. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.10.040

Sharma, J. R. (2007). A family of third-order methods to solve nonlinear equations by quadratic curves approximation. *Applied Mathematics and Computation*, *184*(2), 210–215. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.193

Sholeh, B., & Wartono. (2019). Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan Orde Konvergensi Empat. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *5*(1), 133–140.

Traub, J. F. (1964). *Iterative methods for the solution of equations*. Prentice-Hall, Inc.

Xiaojian, Z. (2008). Modified Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Applied Mathematics and Computation*, *203*(2), 824–827. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.05.092

Yu, X., & Xu, X. (2012). A new family of chebyshev-halley like methods free from second derivative. *Fixed Point Theory*, *13*(1), 319–325.