

Karakteristik Graf Dengan Sisi Bilangan Fibonacci

Darmajid¹⁾, Dwi Mifta Mahanani²⁾

^{1,2} Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya

email: darmajid@ub.ac.id

email: mdwimifta@ub.ac.id

Abstrak

Misalkan \mathcal{F} suatu himpunan berhingga yang beranggotakan bilangan Fibonacci. Dalam penelitian ini dikonstruksi graf baru $G_{\mathcal{F}}$ dimana himpunan titiknya berupa bilangan bulat sedemikian sehingga untuk setiap $F \in \mathcal{F}$, terdapat sisi xy di $G_{\mathcal{F}}$ yang memenuhi $x - y = F$. Dengan memanfaatkan sifat bilangan Fibonacci, diperoleh hasil bahwa jika \mathcal{F} beranggotakan n bilangan Fibonacci pertama maka order terkecil dari $G_{\mathcal{F}}$ adalah $\lceil n/2 \rceil + 1$. Lebih lanjut, graf $G_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana maupun tidak mempunyai siklus untuk kondisi tertentu dari himpunan \mathcal{F} .

Kata Kunci: sisi graf, bilangan Fibonacci, order graf, graf sederhana, siklus.

Abstrack

Let \mathcal{F} be a finite subset of Fibonacci numbers set. In this research, we construct a graph $G_{\mathcal{F}}$ where the set of vertices contains integer numbers such that for every $F \in \mathcal{F}$, there exist some edge xy in G that satisfies the condition $x - y = F$. By applying some properties of the Fibonacci numbers, we prove that if \mathcal{F} contains the first n consecutive Fibonacci numbers then $G_{\mathcal{F}}$ has the smallest order $\lceil n/2 \rceil + 1$. Furthermore, we give the sufficient conditions for $G_{\mathcal{F}}$ become simple graph and contains no cycle.

Keywords: edge of graph, Fibonacci number, order of graph, simple graph, cycle.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu topik matematika diskrit yang memiliki berbagai aplikasi dalam penyelesaian beberapa permasalahan modern. Teori tersebut pertama kali diperkenalkan dalam suatu karya ilmiah yang ditulis oleh matematikawan Swiss, Leonard Euler, pada abad ke-18 Masehi untuk menyelesaikan teka-teki matematika yang dikenal sebagai masalah *Seven Bridges Konigsberg*. Dalam karya ilmiah tersebut dibahas mengenai tujuh jembatan yang menyeberangi sungai Pregel di kota Konigsberg, Prussia dimana permasalahan yang dihadapi adalah penentuan suatu cara atau rute untuk melalui jembatan tepat satu kali. Euler menggunakan representasi titik dan garis untuk menyelesaikan masalah tersebut yang menjadi cikal bakal teori graf (Bondy dan Murty, 2008).

Permasalahan dalam beberapa disiplin ilmu dapat direpresentasikan sebagai suatu model graf. Sebagai contoh, graf dapat dipakai untuk menyajikan persaingan antar berbagai spesies yang berbeda pada suatu lingkungan ekologi, graf dapat dipakai untuk membangun pohon filogenetik dalam ilmu taksonomi, graf digunakan untuk merepresentasikan pengaruh jabatan dalam suatu organisasi, graf dapat dipakai untuk penjadwalan tugas, graf dapat digunakan untuk memodelkan jaringan lalu lintas kendaraan pada suatu kota, dan graf dapat digunakan untuk merepresentasikan hasil pertandingan pada suatu turnamen. Lebih lanjut, graf juga dapat dipakai untuk menghitung banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sejumlah daerah pada peta, membedakan dua senyawa kimia dengan formula molekul yang sama namun memiliki struktur berbeda, dan menghitung angka kombinasi berbeda dari penerbangan diantara dua kota pada suatu jaringan maskapai penerbangan (Foulds, 1992).

Graf adalah struktur diskrit dari titik-titik beserta garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut. Secara matematis, suatu graf G adalah pasangan terurut himpunan (V_G, E_G) dimana V_G adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya disebut sebagai titik dan E_G adalah himpunan yang elemen-elemennya disebut sebagai sisi dan memuat pasangan dua elemen (boleh sama) di V_G (Chartrand dkk., 2016). Terdapat berbagai jenis graf berbeda bergantung pada jenis dan jumlah sisi berbeda yang menghubungkan sepasang titik sehingga membentuk pola-pola tertentu yang dapat dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas-kelas graf yang populer diantaranya graf lingkaran C_n , graf lengkap K_n , graf lintasan P_n , graf bintang S_n , graf pohon T_n dan graf roda W_n .

Bilangan Fibonacci pertama kali dipopulerkan oleh seorang ilmuwan yang berasal dari Italia yang bernama Leonardo Pisano Bogollo yang lahir antara tahun 1170 hingga 1240. Barisan Fibonacci adalah suatu barisan bilangan dimana suku pertama dan keduanya 1 sedangkan suku ketiga dan seterusnya diperoleh dari penjumlahan dua suku sebelumnya (Koshy, 2001). Apabila melihat dengan lebih jeli dalam alam sekitar, beberapa pola jumlah objek membentuk barisan Fibonacci. Jumlah daun pada bunga, jumlah putik pada bunga matahari, pola cangkang kerang, batang pohon dan cabangnya, dan proporsi pada wajah dan badan pada manusia. Selain itu, bilangan Fibonacci dapat dipakai untuk memperkirakan pergerakan harga barang, menentukan nilai optimum suatu fungsi, membuat melodi mudik, membuat proporsi lukisan dan bangunan megah, dan desain web.

Konsep bilangan Fibonacci pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Prodinger dan Tichy pada tahun 1982 yang didefinisikan sebagai banyaknya subhimpunan dari V_G dimana tidak ada dua titik yang bertetangga di graf G . Dalam istilah teori graf, subhimpunan semacam ini disebut sebagai himpunan bebas dan himpunan kosong termasuk di dalamnya. Hasil yang diperoleh terkait bilangan Fibonacci pada graf bintang S_n (Prodinger dan Tichy, 1982). Kirschenhofer dkk. investigasi bilangan Fibonacci pada graf pohon 2-ary (Kirschenhofer dkk., 1983) dan setahun berikutnya mereka memperluas penelitiannya pada graf pohon n -ary dan graf yang dibangun oleh graf pohon sederhana (Kirschenhofer dkk., 1983) dan bilangan Fibonacci pada kelas-kelas graf khusus (Hopkin dan Staton, 1984). Di pihak lain, Linek memperoleh hasil dari penelitiannya bahwa graf bipartit dapat dikonstruksi sedemikian rupa sehingga memiliki bilangan Fibonacci tertentu (Linek, 1989). Penelitian terkait batas atas dari bilangan Fibonacci pada kelas-kelas graf tertentu juga telah dikaji sebelumnya. Sebagai contoh, Alameddine telah menentukan batas bilangan Fibonacci pada graf outerplanar maksimal (Alameddine, 1998), Dutton dkk, telah memberikan batas bilangan Fibonacci pada graf pohon (Dutton, dkk., 1993), dan Liu mengkaji batas bilangan Fibonacci pada beberapa kelas graf terhubung (Liu, 1994). Bilangan Fibonacci sebagai banyaknya subhimpunan titik bebas dimana juga dikaji dalam kelas graf pohon dimana hasil yang diperoleh terkait batas atas dari diameter graf pohon n sisi untuk suatu barisan Fibonacci yang lebih besar dari $2^{n-1} + 5$ (Knopfmacher, 2007) dan pada pihak lain graf diganti dengan komposisi dari dua kelas graf khusus (Dosal-Trujillo dan Galeana-Sanchez, 2019). Di pihak lain, Gunes dkk. mendefinisikan graf Fibonacci sebagai graf yang memiliki barisan derajat berupa n bilangan Fibonacci berurutan dan menggunakan invarian Ω untuk mendapatkan informasi terkait graf tersebut dimana hasil utama yang didapatkan terkait syarat cukup dan syarat perlu bagi eksistensi graf Fibonacci dengan barisan derajat n bilangan Fibonacci berurutan untuk $n = 1,2,3,4$ (Gunes dkk., 2020).

Bilangan Fibonacci juga dikembangkan pada bidang fisika statistik dengan objek berupa graf grid. Telah diteliti bahwa bilangan Fibonacci pada graf (n, m) -grid naik dengan rasio konstan α^{mn} dimana $\alpha = 1,503048082$ yang dikenal sebagai konstanta entropi (Engel, 1990). Lebih lanjut, batas dari konstanta entropi telah didapatkan oleh Calkin dan Wilf (Calkin dan Wilf, 1998). Lebih lanjut, konsep bilangan Fibonacci suatu graf juga

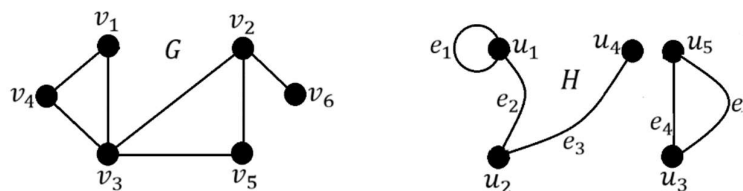
dikaji di bidang kimia dimana bilangan Fibonacci ini dikenal sebagai σ -indeks atau Merrifield-Simmons indeks (Merrifield dan Simmons, 1989) dan pada tahun 2003 telah ditemukan algoritma dalam perhitungan σ -indeks pada graf pohon (Li, dkk. 2003).

Bila dikaji dengan seksama, penelitian-penelitian sebelumnya terkait penggunaan bilangan Fibonacci pada graf hanya dipakai sebagai banyaknya subhimpunan titik bebas pada suatu graf dan belum ada tulisan ilmiah yang mengaplikasikan barisan Fibonacci sebagai sisi dari suatu graf. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikonstruksi graf baru dimana bilangan Fibonacci dilabelkan pada sisi suatu graf. Khususnya, untuk suatu himpunan \mathcal{F} yang memuat bilangan-bilangan Fibonacci, $G_{\mathcal{F}}$ didefinisikan sebagai graf dimana himpunan titiknya memuat bilangan bulat sehingga untuk setiap $F \in \mathcal{F}$, terdapat sisi xy di $G_{\mathcal{F}}$ yang memenuhi $x - y = F$. Tujuan dari penelitian ini adalah memperkenalkan graf baru yang menggunakan bilangan Fibonacci sebagai sisinya dan mengkaji beberapa sifat-sifat graf tersebut, terutama terkait jenis graf dan batas bawah order graf tersebut.

2. KAJIAN TEORI

Kajian teori graf ini dibatasi hanya pada graf sederhana yang merupakan suatu graf tak berarah yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda. Sebagian besar materi pada dasar teori graf ini merujuk pada referensi [Bondy dan Murty, 2008] dan [Chartrand dkk., 2016]. Adapun materi terkait bilangan Fibonacci merujuk pada referensi [Koshy, 2001].

Suatu graf $G = (V_G, E_G)$ adalah sistem matematika yang terdiri dari himpunan tak kosong V_G elemen-elemennya dinamakan titik dan himpunan E_G yang elemen-elemennya merupakan 2-elemen (boleh sama) dari V_G dan disebut sebagai sisi. Sisi $\{u, v\} \in E_G$ cukup ditulis sebagai uv . Titik $u \in V_G$ dikatakan *bertetangga* dengan titik $v \in V_G$ jika $uv \in E_G$. Sisi $e \in E_G$ dikatakan *insiden* dengan titik $u \in V_G$ jika u menjadi salah satu atau kedua ujung dari sisi e . Suatu sisi pada graf dikatakan *loop* jika kedua ujung sisi tersebut merupakan satu titik yang sama. Dua sisi disebut *sisi ganda* jika keduanya insiden dengan pasangan titik yang sama. Suatu graf yang tidak memiliki *loop* maupun sisi ganda disebut *graf sederhana*. Pada Gambar 1, graf G merupakan graf sederhana sedangkan graf H bukanlah graf sederhana dikarenakan memiliki *loop* e_1 serta sisi ganda e_4 dan e_5 .



Gambar 1. Graf G dan Graf H .

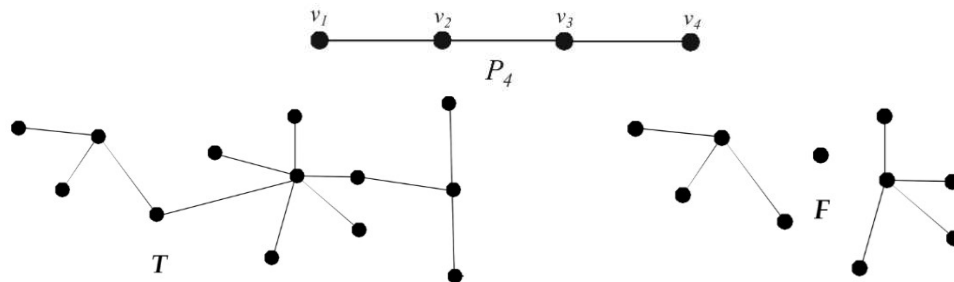
Suatu graf G dikatakan *berhingga* jika V_G merupakan himpunan berhingga. Banyaknya elemen dari V_G disebut sebagai *order* dari G dan dinotasikan dengan $v(G)$. Banyaknya elemen dari E_G disebut sebagai *ukuran* dari G dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$. Graf berorder satu disebut graf *trivial*. *Derajat* dari titik u pada graf G , dinotasikan sebagai $d_G(u)$, didefinisikan sebagai banyaknya sisi di H yang terkait dengan u . Graf H pada Gambar 1 mempunyai derajat titik berturut-turut $d_H(u_1) = 3$, $d_H(u_2) = 2$, $d_H(u_3) = 2$, $d_H(u_4) = 1$, dan $d_H(u_5) = 2$.

Suatu *jalan* pada graf G adalah barisan taknol dan berhingga $W = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_k$ yang anggota-anggotanya merupakan titik-titik di G sedemikian sehingga v_{i-1} bertetangga dengan v_i untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Titik v_0 dan v_k masing-masing disebut

sebagai titik awal dan titik akhir dari jalan W sedangkan titik-titik v_1, v_2, \dots, v_{k-1} disebut sebagai titik-titik dalam dari W . Bilangan bulat k disebut sebagai panjang dari jalan W . Suatu jalan dikatakan tertutup jika titik awal sama dengan titik akhirnya. Jika jalan W melewati sisi-sisi berbeda maka W disebut sebagai trail. Suatu trail yang tertutup disebut sebagai tour. Jika jalan W melewati titik-titik berbeda maka disebut sebagai lintasan. Suatu lintasan yang tertutup dinamakan siklus. Graf G pada Gambar 1 memuat lintasan dengan panjang 1, 2, 3, 4, dan 5 serta siklus dengan panjang 3. Himpunan semua lintasan dengan panjang 1 adalah himpunan semua sisi di G . Lintasan dengan panjang 5 adalah $v_1v_4v_3v_5v_2v_6$. Adapun siklus di G dengan panjang 3 adalah $v_1v_3v_4v_1$ dan $v_3v_2v_5$.

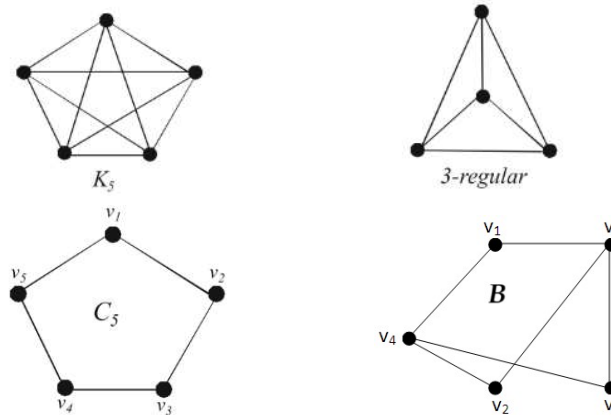
Suatu graf H dikatakan subgraf dari graf G jika $V_H \subseteq V_G$ dan $E_H \subseteq E_G$. Jarak dari titik x ke titik y pada suatu graf G , dinotasikan dengan $d_G(x, y)$, adalah panjang lintasan terpendek dari x ke y . Apabila tidak ditemukan lintasan terpendek yang dimaksud maka dikatakan bahwa jarak kedua titik tersebut adalah ∞ . Sebagai contoh, pada Gambar 1, didapat $d_H(u_1, u_4) = 2$ dan $d_H(u_4, u_5) = \infty$. Dua titik u dan v pada graf G dikatakan terhubung jika terdapat suatu lintasan dari u ke v . Graf G dikatakan terhubung jika setiap pasang titik u dan v di G terhubung. Subgraf terhubung maksimal dinamakan komponen. Pada Gambar 1, graf G merupakan graf terhubung dan memiliki 1 komponen sedangkan graf H bukanlah graf terhubung dan memiliki 2 komponen. Lebih lanjut, graf F pada Gambar 2 merupakan bukanlah graf terhubung dan memiliki 3 komponen.

Berikut adalah jenis-jenis graf umum yang sudah didefinisikan dan dipelajari sebelumnya. Suatu graf G dengan $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dikatakan graf lintasan, dinotasikan dengan P_n jika $E_G = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Suatu graf sederhana dan terhubung yang tidak memuat siklus dinamakan pohon. Suatu graf sederhana yang tidak memuat siklus disebut sebagai hutan.



Gambar 2. Graf lintasan P_4 , graf pohon T dan graf hutan F .

Suatu graf sederhana dikatakan graf lengkap jika setiap pasang titiknya bertetangga. Graf lengkap berorder n dinotasikan dengan K_n dimana n adalah bilangan asli lebih besar dari 1. Suatu graf sederhana dikatakan sebagai graf k -regular jika setiap titiknya berderajat k . Graf lingkaran berorder n dengan $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n , adalah graf terhubung 2-regular. Suatu graf G disebut graf bipartit jika V_G dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan tak kosong X dan Y sedemikian sehingga setiap sisinya berujung di X dan ujung lainnya di Y . Graf B pada Gambar 3 merupakan graf bipartit karena V_B dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan saling lepas $X = \{v_1, v_2\}$ dan $Y = \{v_3, v_4, v_5\}$ sehingga setiap sisinya berujung di X dan di Y .



Gambar 3. Graf lengkap K_5 , graf 3-regular, graf lingkaran C_5 dan graf bipartit B .

Graf bintang $K_{1,n}$ didefinisikan sebagai graf bipartit dimana himpunan titiknya dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sehingga $|X| = 1$ dan $|Y| = n$. *Graf kipas*, dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$, adalah graf yang dibentuk dari graf lintasan P_n dan satu titik x dimana setiap titik pada graf lintasan P_n harus bertetangga dengan titik x .



Gambar 4. Graf bintang $K_{1,4}$ dan graf kipas F_4 .

Graf matahari, dinotasikan dengan S_n dimana $n \geq 3$, adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n dengan cara menambahkan sebuah titik berderajat satu pada setiap titik di C_n . *Graf roda*, dinotasikan dengan W_n dimana $n \geq 2$, adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n dan satu titik x dimana setiap titik pada graf lingkaran C_n harus bertetangga dengan titik x .



Gambar 5. Graf matahari S_5 dan graf roda W_5 .

Bilangan Fibonacci pertama kali dipopulerkan oleh ilmuwan yang berasal dari Italia yang bernama Leonardo Pisano Bogollo yang lahir antara tahun 1170 hingga 1240. Barisan bilangan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... dinamakan barisan Fibonacci. Misalkan F_k menyatakan bilangan Fibonacci ke- k . Dengan mengambil $F_1 = F_2 = 1$ sebagai kondisi awal, barisan Fibonacci tersebut memenuhi relasi rekursif yakni $F_{k-2} + F_{k-1} = F_k$ untuk $k \geq 3$.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur serta analisa penentuan sifat-sifat yang termuat pada graf bersisi bilangan Fibonacci dengan mengamati pola dan contoh graf yang diteliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Membuat contoh-contoh graf dengan definisi yang di berikan dimulai dari graf berukuran 1 dan dikembangkan hingga berukuran n .
2. Mengamati sifat-sifat yang termuat pada graf-graf tersebut seiring dinaikannya ukurannya.
3. Merumuskan dugaan atau hipotesis dari hasil pengamatan yang telah dilakukan.
4. Menyusun beberapa teorema berkaitan dengan hipotesis mengenai sifat-sifat graf tersebut
5. Membuktikan secara matematis kebenaran teorema yang telah disusun

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan didefinisikan graf baru dimana sisi-sisinya merupakan bilangan Fibonacci dan dikaji sifat-sifat yang dimiliki graf tersebut. Notasi F_k senantiasa dimaksudkan untuk bilangan Fibonacci ke- k untuk suatu bilangan asli k .

Misalkan \mathcal{F} suatu himpunan berhingga yang beranggotakan bilangan Fibonacci. Definisikan suatu graf $G_{\mathcal{F}}$ sebagai graf dengan himpunan titiknya berupa bilangan bulat sedemikian sehingga untuk setiap $F \in \mathcal{F}$, terdapat sisi xy di $G_{\mathcal{F}}$ yang memenuhi $x - y = F$. Karena bilangan Fibonacci yang digunakan seluruhnya tidak ada yang bernilai 0 maka graf sisi Fibonacci ini tidak memiliki *loop* sebagai sisinya. Selain itu, himpunan titik yang digunakan dalam graf ini bisa berhingga maupun tak berhingga.

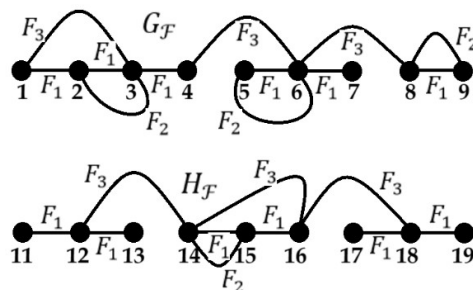
Perhatikan bahwa untuk setiap himpunan \mathcal{F} yang diberikan, graf $G_{\mathcal{F}}$ yang dihasilkan tidaklah tunggal. Sebagai contoh, misalkan $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$. Berikut dua contoh graf berhingga sisi fibonacci yakni $G_{\mathcal{F}} = (V_G, E_G)$ dan $H_{\mathcal{F}} = (V_H, E_H)$ dimana

$$V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}, \text{ dengan } v_k = k, \text{ untuk } k \in \{1, 2, \dots, 9\},$$

$$E_G = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_2, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6, v_6v_5, v_6v_7, v_6v_8, v_8v_9, v_9v_8\},$$

$$V_H = \{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{19}\}, \text{ dengan } v_k = k, \text{ untuk } k \in \{11, 12, \dots, 19\},$$

$$E_H = \{v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{12}v_{14}, v_{14}v_{15}, v_{15}v_{14}, v_{14}v_{16}, v_{16}v_{18}, v_{17}v_{18}, v_{18}v_{19}\}.$$



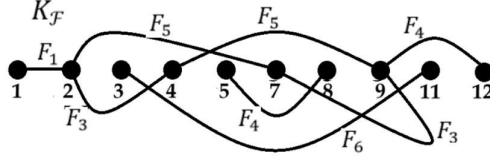
Gambar 6. Graf sisi Fibonacci $G_{\mathcal{F}}$ dan $H_{\mathcal{F}}$.

Graf yang disajikan $G_{\mathcal{F}}$ dan $H_{\mathcal{F}}$ pada Gambar 6 masing-masing memuat dua bilangan Fibonacci pertama sehingga memungkinkan adanya sisi ganda sehingga kedua graf yang dihasilkan bukan merupakan graf sederhana. Dengan fakta bahwa bilangan Fibonacci

bernilai sama hanya pada bilangan pertama dan kedua, didapatkan hasil yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1. Jika \mathcal{F} tidak memuat sekaligus F_1 dan F_2 maka $G_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana.

Bukti. Misalkan xy suatu sisi di $G_{\mathcal{F}}$. Berdasarkan definisi graf $G_{\mathcal{F}}$, terdapat suatu bilangan $F \in \mathcal{F}$ sehingga $x - y = F$. Karena bilangan-bilangan di \mathcal{F} tidak ada yang bernilai nol maka $x \neq y$ sehingga sisi xy bukanlah *loop*. Lebih lanjut, karena \mathcal{F} tidak memuat sekaligus F_1 dan F_2 maka bilangan-bilangan di \mathcal{F} saling berlainan sehingga tidak ada dua sisi yang terkait dengan pasangan titik yang sama. Akibatnya, $G_{\mathcal{F}}$ tidak memiliki sisi ganda. Karena $G_{\mathcal{F}}$ tidak memiliki *loop* maupun sisi ganda maka terbukti bahwa $G_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana.



Gambar 7. Graf $K_{\mathcal{F}}$.

Misalkan $\mathcal{F} = \{F_1, F_3, F_4, F_5, F_6\}$. Karena \mathcal{F} tidak memuat sekaligus F_1 dan F_2 maka $G_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana. Sebagai contoh, definisikan $K_{\mathcal{F}} = (V_K, H_K)$ dimana

$$V_K = \{v_j \mid v_j = j, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}\} \text{ dan}$$

$$E_K = \{v_1v_2, v_2v_4, v_2v_7, v_7v_9, v_4v_9, v_3v_{11}, v_5v_8, v_9v_{12}\}$$

yang disajikan pada Gambar 3.2. Terlihat bahwa graf $K_{\mathcal{F}}$ tidak memuat *loop* maupun sisi ganda sehingga $K_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana. Bila diperhatikan secara seksama, graf $K_{\mathcal{F}}$ pada Gambar 7 memiliki sebuah siklus dengan panjang 4 yakni $v_2v_4v_9v_7v_2$.

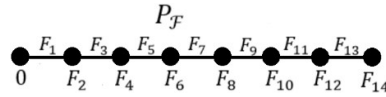
Untuk setiap sisi xy di $G_{\mathcal{F}}$, kita definisikan panjang sisi xy sebagai nilai dari $|x - y|$. Dengan menggunakan sifat-sifat dari bilangan Fibonacci, untuk suatu himpunan \mathcal{F} tertentu dapat ditunjukkan bahwa $G_{\mathcal{F}}$ tidak memuat siklus seperti yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2. Jika \mathcal{F} memuat bilangan-bilangan Fibonacci berindeks genap berurutan atau berindeks ganjil berurutan maka $G_{\mathcal{F}}$ tidak memuat siklus.

Bukti. Misalkan $\mathcal{F} = \{F_{2k}, F_{2k+2}, \dots, F_{2n}\}$. Andaikan $G_{\mathcal{F}}$ memuat siklus (x_1, x_2, \dots, x_l) . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa sisi x_lx_1 memiliki panjang terbesar yakni panjang F_{2m} dengan $k < m \leq n$. Ini berarti, sisi-sisi lain $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{l-1}x_l$ pada siklus tersebut memiliki panjang saling berbeda dan seluruhnya kurang dari F_{2m} . Panjang dari sisi-sisi pada siklus ini merupakan subhimpunan dari $\{F_{2k}, F_{2k+2}, \dots, F_{2m}\}$. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} F_{2m} = |x_l - x_1| &\leq \sum_{i=1}^{l-1} |x_{i+1} - x_i| \\ &\leq F_{2k} + F_{2k+2} + F_{2k+4} \dots + F_{2m-2} \\ &= F_{2k} + (F_{2k+3} - F_{2k+1}) + (F_{2k+5} - F_{2k+3}) + \dots + (F_{2m-1} - F_{2k-3}) \\ &= F_{2k} - F_{2k+1} + F_{2m-1} \\ &< F_{2m-1} < F_{2m} \end{aligned}$$

yang merupakan suatu kontradiksi. Akibatnya, terbukti bahwa $G_{\mathcal{F}}$ tidak memuat siklus. Pembuktian untuk \mathcal{F} yang memuat bilangan-bilangan Fibonacci berindeks ganjil berurutan serupa.



Gambar 8. Graf $P_{\mathcal{F}}$.

Misalkan $\mathcal{F} = \{F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}, F_{13}\}$. Definisikan graf sisi Fibonacci $P_{\mathcal{F}} = (V_P, H_P)$ dimana $V_P = \{0, F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}, F_{12}, F_{14}\}$ dan $E_K = \{F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}, F_{13}\}$. Jelas bahwa \mathcal{F} memuat bilangan-bilangan Fibonacci berindeks ganjil berurutan sehingga berdasarkan Teorema 4.2, graf tersebut tidak memiliki siklus seperti pada Gambar 8.

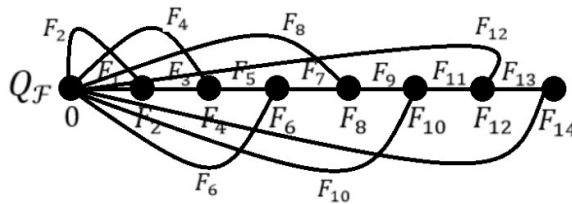
Perhatikan bahwa setiap graf sisi Fibonacci yang dihasilkan dapat merupakan graf berhingga ataupun graf tak berhingga. Oleh karena itu, hal yang menarik untuk dikaji adalah batas bawah order dari graf $G_{\mathcal{F}}$ apabila \mathcal{F} merupakan n suku pertama barisan Fibonacci. Hasil pengamatan tersebut dirumuskan dalam teorema berikut.

Teorema 4.3. Jika F_n adalah unsur terbesar pada himpunan \mathcal{F} maka batas terkecil dari order graf $G_{\mathcal{F}}$ adalah $\lceil n/2 \rceil + 1$.

Bukti. Misalkan $d = \lceil n/2 \rceil$. Ini berarti, $n \leq 2d \leq n + 1$. Akan dibuktikan bahwa

$$|V_{G_{\mathcal{F}}}| \geq d + 1.$$

Pilih \mathcal{H} sebagai subhimpunan dari \mathcal{F} yang beranggotakan semua bilangan F_{2k-1} dengan $1 \leq 2k - 1 \leq 2d - 1 \leq n$. Dari pendefinisian graf, jelas bahwa $G_{\mathcal{H}}$ merupakan subgraf dari $G_{\mathcal{F}}$. Karena \mathcal{H} memuat bilangan Fibonacci berindeks ganjil maka menurut Teorema 4.2, graf $G_{\mathcal{H}}$ tidak memiliki siklus sehingga memiliki sebanyak d sisi. Akibatnya, graf $G_{\mathcal{H}}$ memiliki paling sedikit $d + 1$ titik. Dengan demikian, $|V_{G_{\mathcal{F}}}| \geq |V_{G_{\mathcal{H}}}| \geq d + 1$. Selanjutnya, akan dibuktikan eksistensi graf $G_{\mathcal{F}}$ yang memiliki tepat $d + 1$ titik. Pandang himpunan $V = \{F_0 = 0, F_2, F_4, \dots, F_{2d}\}$. Karena $F_2 - F_0 = F_1 = F_2$ dan untuk setiap $k = 1, 2, 3, \dots, d$ berlaku $F_{2k} - F_{2k-2} = F_{2k-1}$ dan $F_{2k} - F_0 = F_{2k}$ maka setiap unsur di \mathcal{F} dapat direpresentasikan sebagai selisih pasangan bilangan di V . Akibatnya, himpunan V tersebut dapat menjadi himpunan titik pada graf $G_{\mathcal{F}}$. Bukti telah lengkap.



Gambar 9. Graf $Q_{\mathcal{F}}$.

Misalkan $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{13}\}$. Berdasarkan Teorema 4.3, batas bawah dari order graf $Q_{\mathcal{F}} = (V_Q, E_Q)$ adalah $\lceil 13/2 \rceil + 1 = 8$. Dengan memilih $V_Q = \{0, F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}, F_{12}, F_{14}\}$, didapatkan graf $Q_{\mathcal{F}}$ berorder 8 seperti yang dituangkan dalam Gambar 9.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh ketentuan sebagai berikut.

- a. Jika \mathcal{F} tidak memuat sekaligus F_1 dan F_2 maka $G_{\mathcal{F}}$ merupakan graf sederhana.

- b. Jika \mathcal{F} memuat bilangan-bilangan Fibonacci berindeks genap berurutan atau berindeks ganjil berurutan maka $G_{\mathcal{F}}$ tidak memuat siklus.
- c. Jika $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ maka batas terkecil dari order graf $G_{\mathcal{F}}$ adalah $\lceil n/2 \rceil + 1$.

6. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya atas pemberian dana penelitian ini berdasarkan surat perjanjian 2487 / UN10.F09 / PN / 2022.

7. REFERENSI

- Alameddine, A.F. (1998). *Bounds on the Fibonacci number of a maximal outerplanar graph*, Fibonacci Quart. 36 (3), 206–210.
- Bondy, J., & Murty, A. 2008, *Graph Theory*. New York: Springer.
- Calkin, N.J. & Wilf, H.S. (1998). *The number of independent sets in a grid graph*, SIAM J. Discrete Math. 11 (1) 54–60 (electronic).
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Pres.
- Dosal-Trujillo, L.A., & Galeana-Sanchez, H. (2019). “On the Fibonacci numbers of the composition of graphs”, dalam *Discrete Applied Mathematics*. 266, 213-218.
- Dutton, R., Chandrasekharan, N., & Brigham, R. (1993). *On the number of independent sets of nodes in a tree*, Fibonacci Quart. 31 (2), 98–104.
- Engel, K. (1990). *On the Fibonacci number of an $m \times n$ lattice*, Fibonacci Quart. 28 (1), 72–78.
- Foulds, L.R. (2011). *Graph Theory Applications*. New York: Springer Universitext.
- Gunes, A.Y., Delen, S., Demirci, M., Cevik, A.S., & Cangul, I.N. (2020). “Fibonacci Graphs”, dalam *Symmetry*. 12, 1383-1395.
- Hopkins, G. & Staton, W. (1984). *Some identities arising from the Fibonacci numbers of certain graphs*, Fibonacci Quart. 22 (3), 255–258.
- Kirschenhofer, P., Prodinger, H. & Tichy, R.F. (1983). *Fibonacci numbers of graphs. II*, Fibonacci Quart. 21 (3). 219–229.
- Kirschenhofer, P., Prodinger, H. & Tichy, R.F. (1984). *Fibonacci numbers of graphs. III Planted plane trees*, Fibonacci Numbers and their Applications, Patras, Mathematics Applications, vol. 28, Reidel, Dordrecht, 1986, pp. 105–120.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Knopfmacher, A., Tichy, R.F., Wagner, S. & Ziegler, V. (2007). “Graph, partitions and Fibonacci numbers”, dalam *Discrete Applied Mathematics*. 155, 1175-1187.
- Li, X., Li, Z., & Wang, L. (2003). *The inverse problems for some topological indices in combinatorial chemistry*, J. Comput. Biol. 10 (1), 47–55.
- Linek, V. (1989). *Bipartite graphs can have any number of independent sets*, Discrete Math. 76 (2), 131–136.
- Liu, J. (1994). *Constraints on the number of maximal independent sets in graphs*, J. Graph Theory 18 (2) 195–204.

- Merrifield, R.E. & Simmons, H.E. 1989. *Topological Methods in Chemistry*, Wiley, New York.
- Ordentlich, E. & Roth, R.M. (2004). *Independent sets in regular hypergraphs and multidimensional runlength-limited constraints*, SIAM J. Discrete Math. 17 (4), 615–623 (electronic).
- Sagan, B.E. (1988). *A note on independent sets in trees*, SIAM J. Discrete Math. 1 (1), 105–108.
- Sapozhenko, A.A. (2001). *Independent sets and sum-free sets*, Discrete Mathematics and Applications, Bansko, 2002, Research in the Mathematics and Computational Sciences, vol. 6, South-West University, Blagoevgrad, pp. 35–42.
- Prodinger, H. & Tichy, R.F. (1982). *Fibonacci numbers of graphs*, Fibonacci Quart. 20 (1), 16–21.
- Wilf, H.S. (1986). The number of maximal independent sets in a tree, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 7 (1) 125–130.