

Analisis Kestabilan Model Penipisan Sumber Daya Hutan Dengan Mempertimbangkan Faktor Migrasi Penduduk

Vivi Ramdhani¹⁾

¹Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan, Universitas Islam Negeri Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi

email: viviramdhani@uinbukittinggi.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini dipaparkan sebuah model penipisan sumber daya hutan (B) akibat populasi penduduk (N) dan tekanan populasi penduduk (P), serta dampak industrialisasi (I) dengan memperhatikan faktor migrasi penduduk pada laju populasi penduduk (N) karena tersedianya industri. Metode yang digunakan pada artikel ini melalui studi pustaka. Berdasarkan analisis model didapatkan 4 titik tetap tak negatif, yaitu E_1, E_2, E_3 serta E^* . Selanjutnya keempat titik tetap itu dianalisis kestabilannya. Hasil analisis mengungkapkan bahwa titik tetap E_1, E_2 , dan E_3 merupakan jenis titik tetap saddle point dan bersifat takstabil. Sementara itu, titik tetap E^* dianalisis kestabilannya dengan pendekatan perhitungan numerik karena tidak mudah menguraikannya secara analitik. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik terhadap titik keseimbangannya dan diperoleh bahwa kestabilan sumber daya hutan mengalami penipisan karena terjadinya peningkatan populasi dan tekanan populasi serta industrialisasi. Ketersediaan sumber daya hutan berpengaruh positif terhadap tingkat populasi penduduk. Namun, pertumbuhan populasi penduduk akan meningkat karena dipengaruhi oleh faktor migrasi penduduk yang menyebabkan penurunan sumber daya hutan. Oleh sebab itu, diperlukan pengendalian terhadap laju populasi penduduk demi menjaga sumber daya hutan dari kepunahan.

Kata Kunci: Kestabilan, Migrasi penduduk, Sumber daya hutan, Titik tetap.

Abstract

This article is presented a depletion model of forest resource (B) due to population (N) and population pressure (P), as well as the impact of industrialization (I) by taking into account population migration factors on population rates (N) due to the availability of industry. The method used in this article is through literature study. Based on the analysis model, 4 non-negative fixed points are obtained, namely E_1, E_2, E_3 and E^* . Next, the stability of the four fixed points is explained. The analysis results reveal that the fixed points E_1, E_2 , dan E_3 are types of saddle point fixed points and are unstable. Meanwhile, the stability of the fixed point E^* is explained using a numerical calculation approach because it is not easy to describe it analytically. In the final part, a numerical simulation was carried out on the balance point and it was found that the stability of forest resources decreased along with the increase in population and population pressure and industrialization. The availability of forest resources has a positive effect on population levels. However, population growth will increase because it is influenced by population migration factors which cause a decline in forest resources. Therefore, it is necessary to control the population rate in order to protect forest resources from extinction.

Keywords: Fixed point, Forest resources, Population migration, Stability.

1. PENDAHULUAN

Hutan merupakan bagian yang berperan penting demi kelangsungan hidup di bumi. Hutan berfungsi sebagai penjaga keseimbangan ekologi. Hutan juga dikatakan sebagai paru-paru dunia karena sebagai penjaga kestabilan siklus pertukaran udara. Pohon yang ada di hutan mengeluarkan oksigen sehingga udara menjadi segar dan bersih serta menyerap

karbondioksida. Dengan demikian, daerah yang memiliki hutan yang luas mempunyai udara yang lebih sejuk dibanding daerah yang gersang. Disamping itu, hutan juga berfungsi sebagai tempat rekreasi, penyimpanan air, sumber bahan bakar dan penyedia bahan baku industri.

Sebenarnya manusia menyadari bahwa hutan sangat penting bagi kehidupan. Akan tetapi, masih banyak terjadi pembabatan dan eksplorasi hutan secara berlebihan sehingga hutan yang awalnya bisa menjaga stabilitas ekologi sekarang sudah tidak mampu lagi menahan air hujan sehingga sering terjadi banjir dan longsor. Akibat dari bencana ini juga dirasakan oleh manusia itu sendiri. Untuk itu, diperlukan kesadaran manusia dalam menjaga kelestarian lingkungan dan hutan. Eksplorasi yang tidak terkendali menyebabkan berkurangnya luas hutan, pembakaran hutan untuk dijadikan sebagai lahan perkebunan dan pemukiman mempercepat berkurangnya luas wilayah hutan. Hal ini terjadi pada beberapa negara berkembang, berkurangnya hutan disebabkan karena kegiatan penduduk menggunakan hutan secara berlebihan untuk infrastruktur dan pengembangan industri (Dubey et al., 2009). Kerusakan hutan yang disebabkan populasi penduduk dan industrialisasi adalah masalah krusial yang dihadapi karena mengancam keseimbangan lingkungan.

Untuk menanggulangi masalah ini, beberapa upaya telah dilakukan dalam menjaga kelestarian hutan. Diantaranya penanaman hutan kembali, sistem tebang pilih dalam menebang pohon, sistem tebang tanam dalam kegiatan penebangan hutan, serta melarang penebangan hutan ilegal. Selain itu, juga dilakukan pendekatan melalui pemanfaatan ilmu pengetahuan. Salah satunya melalui pemodelan matematika. Perkembangan ilmu pemodelan matematika memberikan andil dalam menanggulangi masalah ekologi.

Beberapa ahli telah melakukan penelitian terkait dengan penipisan sumber daya hutan. Penelitian-penelitian tersebut menemukan bahwa penipisan sumber daya hutan dipengaruhi oleh faktor populasi, tekanan populasi, dan industri (Dubey et al, 2003, Dubey et al., 2009., Dubey dan Narayanan, 2010, Misra et al., 2014, Ramdhani et al., 2015, Sundar et al., 2017, Anggriani, et al., 2018, Eswari et al., 2019, Ezeorah dan Ekaka-A, 2022). Selanjutnya, terdapat pengaruh teknologi terhadap konservasi sumber daya yang terbaharui (Shukla et. al., 2011). Pada tahun 2022 dilakukan penelitian terkait model berkurangnya sumber daya hutan bakau. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pembukaan lahan untuk tambak ikan berkontribusi signifikan terhadap kerusakan hutan mangrove. Hal ini dapat mengakibatkan hilangnya habitat bagi berbagai spesies dan mengganggu ekosistem pesisir (Wakhidah, Nugraheni dan Winarni, 2022). Sementara itu, Ramdhani dan Safitri (2023) melakukan penelitian untuk mengembangkan model matematis non-linear yang menjelaskan penurunan biomassa hutan akibat pertumbuhan populasi, tekanan populasi, dan industrialisasi. Penelitian tersebut menjelaskan bahwa pertumbuhan populasi berkontribusi pada penurunan biomassa hutan. Sebaliknya, biomassa hutan memiliki dampak positif terhadap tingkat populasi, menunjukkan hubungan timbal balik antara keduanya.

Penelitian penipisan sumber daya hutan akan terus berkembang seiring bertambah banyaknya faktor yang mempengaruhinya serta adanya dampak kerusakan hutan yang semakin besar dan kompleks. Penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya sebagaimana pada penjelasan di atas sejalan dengan penelitian yang dilakukan pada artikel ini. Penelitian-penelitian tersebut mendukung ketercapaian tujuan dari

penelitian yang dilakukan dalam artikel ini, yaitu melihat bagaimana perubahan sumber daya hutan akibat adanya populasi penduduk, tekanan populasi penduduk, dan industrialisasi dengan mempertimbangkan faktor migrasi penduduk. Artikel ini merupakan lanjutan dari penelitian mengenai penipisan sumber daya hutan yang memang mesti dilakukan secara berkesinambungan.

Penelitian terkait penipisan sumber daya hutan perlu dilakukan secara berkelanjutan karena kondisi hutan di Indonesia saat ini semakin hari semakin terkikis. Misalnya hutan-hutan yang berada di Kalimantan dan Sumatera. Kondisi hutan di daerah tersebut sudah disulap menjadi daerah pertanian, perkebunan, dan pemukiman yang menyebabkan hilangnya wilayah hutan. Selain itu, pembakaran hutan yang dilakukan oleh oknum tertentu untuk membuka lahan pertanian memperparah keadaan hutan serta merusak ekosistem keanekaragaman hayati. Penebangan hutan secara ilegal mempercepat berkurangnya area hutan. Perubahan iklim akan meningkatkan resiko kebakaran hutan yang berimbas pada kerusakan lingkungan.

Masalah lainnya terdapat konflik lahan antara kepentingan pemerintah, perusahaan dan masyarakat terhadap pengelolaan dan pemanfaatan hutan. Hal ini akan berujung terganggunya hak-hak masyarakat lokal dalam menjaga dan mengelola hutan. Terlebih lagi adanya rencana pemerintah akan memindahkan ibu kota Negara Indonesia ke Ibu Kota Nusantara (IKN) di Kalimantan. Sudah berapa hektar wilayah hutan di Kalimantan yang disulap supaya terlaksananya mega proyek ini. Jika rencana ini terealisasi akan terjadi migrasi penduduk yang cukup signifikan ke IKN yang akan mempengaruhi kestabilan ekosistem hutan. Untuk itu, perlu dilakukan penelitian secara berkelanjutan yang berhubungan dengan kondisi sumber daya hutan dengan menggunakan model matematika yang telah dikemukakan pada penelitian-penelitian sebelumnya.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Anggriani, Nurhayati dan Subchan (2018) serta penelitian oleh Ramdhani dan Safitri (2023) dilakukan modifikasi model penipisan sumber daya hutan dengan melihat faktor migrasi penduduk karena tersedianya industri. Model itu juga mengacu pada penelitian Dubey et al. (2009) dan pada Shukla, Lata dan Misra (2011). Hal ini dilakukan karena semakin lama, semakin banyak faktor yang mempengaruhi suatu model matematika. Dengan memodifikasi model akan dilihat pengaruh faktor migrasi penduduk akibat adanya industri terhadap sumber daya hutan.

Permasalahan tersebut akan diformulasikan dalam bentuk model matematika taklinear. Setelah itu dilakukan analisis titik tetap model. Kemudian dibahas analisis kestabilan pada setiap titik tetap. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik terhadap model dengan bervariasi nilai parameter model. Hal ini penting dilakukan untuk melihat bagaimana perubahan sumber daya hutan karena adanya pengaruh populasi penduduk, kepadatan populasi penduduk, dan industrialisasi. Selain itu, hasil dari simulasi numerik ini juga mampu menggambarkan pengaruh populasi dan migrasi penduduk terhadap ketersediaan sumber daya hutan. Dengan demikian, diharapkan hasil penelitian ini bisa menggambarkan kondisi hutan jika terjadi perubahan nilai pada parameter model. Sehingga upaya konservasi hutan bisa dilakukan apabila terjadinya penipisan sumber daya hutan.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa buku referensi, artikel ilmiah, serta hasil temuan dari penelitian sebelumnya. Hal ini berguna sebagai landasan teori dan sumber informasi yang terkait dengan masalah yang akan diteliti. Selanjutnya pengolahan dan simulasi data dilakukan melalui perhitungan numerik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Model Penipisan Sumber Daya Hutan dengan Mempertimbangkan Faktor Migrasi Penduduk

Model yang akan dibahas adalah sebuah model penipisan sumber daya hutan dengan mempertimbangkan faktor migrasi penduduk akibat ketersediaan industri. Ada beberapa asumsi yang diberikan pada model penipisan sumber daya hutan, yaitu:

- 1) Kepadatan sumber daya hutan serta populasi penduduk dipengaruhi oleh persamaan logistik.
- 2) Rata-rata pertumbuhan tekanan populasi penduduk sebanding dengan kepadatan penduduk.
- 3) Penipisan sumber daya hutan diasumsikan sebagai dampak dari populasi penduduk serta industrialisasi.
- 4) Setiap parameter yang terdapat pada model bernilai positif.

Berdasarkan asumsi di atas, berikut diberikan model penipisan sumber daya hutan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa tak linier:

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{dt} &= s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B - s_0 B - \beta_2 N B - s_1 I B - \beta_3 B^2 I \\
 \frac{dN}{dt} &= r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - r_0 N + \beta_1 N B + \alpha_1 r_1 B^2 N + \alpha N I, \\
 \frac{dP}{dt} &= \lambda N - \lambda_0 P - \theta I, \\
 \frac{dI}{dt} &= \pi \theta P + \pi_1 s_1 I B - \theta_0 I, \\
 N(0) &= N_0 \geq 0, B(0) = B_0 \geq 0, P(0) = P_0 \geq 0, \\
 I(0) &= I_0 \geq 0, 0 \leq \pi \leq 1, 0 \leq \pi_1 \leq 1
 \end{aligned} \tag{1}$$

Pada sistem (1), $B(t)$ adalah kepadatan sumber daya hutan, $N(t)$ adalah kepadatan populasi penduduk, $P(t)$ adalah kepadatan tekanan populasi penduduk, serta $I(t)$ adalah kepadatan industrialisasi. Parameter yang ada pada sistem (1) dapat dilihat pada Tabel.1 berikut:

Tabel 1. Parameter model penipisan sumber daya hutan

Notasi	Keterangan
s	Koefisien tingkat pertumbuhan intrinsik biomassa sumber daya hutan.
L	Daya dukung biomassa sumber daya hutan.
s_0	Koefisien tingkat penipisan biomassa sumber daya hutan secara alami.
r_0	Koefisien tingkat kematian populasi secara alami.
r	Tingkat pertumbuhan intrinsik kepadatan populasi.
K	Daya dukung kepadatan populasi.
β_1	Tingkat pertumbuhan seluruh kepadatan populasi akibat sumber daya hutan.

Notasi	Keterangan
β_2	Koefisien tingkat hubungan penipisan biomassa sumber daya hutan dengan kepadatan populasi.
λ	Koefisien tingkat pertumbuhan tekanan populasi.
λ_0	Koefisien tingkat pengurangan tekanan populasi secara alami.
θ	Koefisien tingkat pengurangan tekanan populasi karena meningkatnya industrialisasi.
s_1	Koefisien tingkat penipisan kepadatan biomassa sumber daya hutan akibat industrialisasi.
$\pi_1 s_1$	Tingkat pertumbuhan industrialisasi karena adanya sumber daya hutan.
π	Tingkat pertumbuhan industrialisasi karena tekanan populasi.
θ_0	Koefisien tingkat pengendali industrialisasi secara eksternal yang dilakukan pemerintah.
β_3	Koefisien penipisan sumber daya hutan akibat penumpukan industrialisasi.
α_1	koefisien penipisan sumber biomassa hutan karena pengaruh kepadatan populasi penduduk
r_1	koefisien tingkat pertumbuhan populasi karena sumber daya biomassa hutan
α	faktor migrasi penduduk akibat adanya industri

b. Titik Tetap Model

Untuk mendapatkan titik tetap dari sistem (1) terlebih dahulu ditentukan $\frac{dB}{dt} = 0$, $\frac{dN}{dt} = 0$, $\frac{dP}{dt} = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$. Atau melalui sistem persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B - s_0 B - \beta_2 N B - s_1 I B - \beta_3 B^2 I &= 0 \\
 r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - r_0 N + \beta_1 N B + \alpha_1 r_1 B^2 N + \alpha N I &= 0, \\
 \lambda N - \lambda_0 P - \theta I &= 0, \\
 \pi \theta P + \pi_1 s_1 I B - \theta_0 I &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Pada langkah berikutnya, sitem persamaan (2) dianalisis dan dihasilkan empat titik tetap taknegatif, yaitu $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$, dan $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$, serta $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ dengan:

$$\begin{aligned}
 \hat{B} &= \frac{L(s - s_0)}{s}, \\
 \bar{N} &= \frac{K(r - r_0)(\pi\theta^2 - \lambda_0\theta_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta}, \\
 \bar{P} &= \frac{\lambda K\theta_0(r - r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta}, \\
 \bar{I} &= \frac{K\pi\theta\lambda(r - r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta},
 \end{aligned}$$

di mana $r > r_0$, dan $s > s_0$. Titik tetap yang pertama, $E_1(0, 0, 0, 0)$ merupakan kondisi ketika kepadatan populasi, tekanan kepadatan populasi, dan industrialisasi tidak berpengaruh terhadap kepadatan hutan.

c. Analisis Kestabilan Titik Tetap Model

Untuk tahap selanjutnya, dianalisis bagaimana kestabilan dari sistem (1) terhadap semua titik tetap yang sudah diperoleh sebelumnya. Langkah pertama sistem (1) dilinearakan sehingga didapatkan matriks Jacobi dari sistem persamaan tersebut. Kemudian, dicari matriks Jacobi untuk semua titik tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$, dan $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$. Pada tahap akhir, diperoleh jenis kestabilan titik tetap berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobi setiap titik tetap. Misalkan sistem (1) dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(B, N, P, I) &= s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B - s_0 B - \beta_2 N B - s_1 I B - \beta_3 B^2 I \\ g(B, N, P, I) &= r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - r_0 N + \beta_1 N B + \alpha_1 r_1 B^2 N + \alpha N I, \\ h(B, N, P, I) &= \lambda N - \lambda_0 P - \theta I, \\ y(B, N, P, I) &= \pi \theta P + \pi_1 s_1 I B - \theta_0 I, \end{aligned} \quad (3)$$

Pelinearan persamaan pada sistem (3) dilakukan untuk memeriksa kestabilan sistem pada sistem (1). Diperoleh matriks Jacobi J_{E_i} untuk titik tetap E_i adalah sebagai berikut: (Khail HK., 2002)

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial B} & \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial B} & \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial P} & \frac{\partial g}{\partial I} \\ \frac{\partial h}{\partial B} & \frac{\partial h}{\partial N} & \frac{\partial h}{\partial P} & \frac{\partial h}{\partial I} \\ \frac{\partial y}{\partial B} & \frac{\partial y}{\partial N} & \frac{\partial y}{\partial P} & \frac{\partial y}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} s \left(1 - \frac{2B}{L}\right) - s_0 - \beta_2 N - s_1 I - 2\beta_3 B I & -\beta_2 B & 0 & -s_1 B - \beta_3 B^2 \\ \beta_1 N + \alpha_1 r_1 B N & r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) - r_0 + \beta_1 B \alpha_1 r_1 B^2 + \alpha I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda_0 & -\theta \\ \pi_1 s_1 I & 0 & \pi \theta & \pi_1 s_1 B - \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Prilaku kestabilan sistem (1) dianalisis dengan mensubstitusikan setiap titik tetap dari sistem tersebut, yaitu titik tetap $E_0(0, 0, 0, 0)$, $E_1(\hat{B}, 0, 0, 0)$, dan titik tetap $E_2(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ pada matriks persamaan (4). Akan tetapi, analisis kestabilan titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ akan dibahas secara khusus dengan metode yang berbeda dari tiga titik tetap sebelumnya.

Kestabilan Titik Tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$

Pelinearan sistem (1) untuk titik tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$ terhadap matriks Jacobi pada persamaan (4) memberikan matriks Jacobi dalam bentuk:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} s - s_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r - r_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \theta & -\theta \\ 0 & 0 & \pi \theta & -\theta_0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_1} diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J_{E_1} - \psi I| = 0$ dimana I adalah matriks identitas, sehingga diperoleh :

$$\psi_1 = s - s_0 > 0$$

$$\psi_2 = r - r_0 > 0$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \lambda_0) + \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0^2 - 4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \lambda_0) - \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0^2 - 4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0}$$

Berdasarkan hasil tersebut jelas bahwa nilai eigen ψ_1 dan ψ_2 bernilai positif. Oleh karena itu, titik tetap $E_1(0, 0, 0)$ merupakan titik tetap tidak stabil. Apabila $(\theta_0 + \lambda_0) \pm \sqrt{\theta_0^2 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0 - 4\theta^2\pi} < 0$ maka titik tersebut merupakan titik tetap tak stabil dengan jenis *saddle point*/pelana (Robinson, 2004).

Kestabilan Titik Tetap $E_2(\hat{B}, 0, 0)$

Pelinearan yang dilakukan pada titik tetap $E_2(\hat{B}, 0, 0)$ memberikan matriks Jacobi seperti pada persamaan 5.

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} s - s_0 - \frac{2s\hat{B}}{L} & -\hat{B}(\beta_2 + \alpha_1\hat{B}) & 0 & \hat{B}(-s_1 + \beta_3\hat{B}) \\ 0 & r - r_0 + \hat{B}(\beta_1 + r_1\alpha_1\hat{B}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda_0 & -\theta \\ 0 & 0 & \pi\theta & \pi_1s_1\hat{B} - \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Selanjutnya, diperoleh nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|J_{E_2} - \psi I| = 0$ di mana I adalah matriks identitas seperti berikut ini:

$$\psi_1 = s_0 - s < 0,$$

$$\psi_2 = r - r_0 + \hat{B}(\beta_1 + \hat{B}r_1\alpha_1) > 0$$

$$\psi_{3,4} = \frac{1}{2}(\pi_1s_1\hat{B} - \theta_0 - \lambda_0) \pm \frac{1}{2}\left((\pi_1s_1\hat{B})^2 - 2(\pi_1s_1\hat{B}\theta_0 - \pi_1s_1\hat{B}\lambda_0 + \theta_0\lambda_0 + 2\theta^2\pi) + \theta_0^2 + \lambda_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dengan melihat nilai eigen tersebut, ditunjukkan bahwa nilai eigen $\psi_1 < 0$ dan nilai eigen $\psi_2 > 0$. Jadi, titik tetap $E_1(\hat{B}, 0, 0)$ adalah jenis titik tetap *saddle point* dan bersifat takstabil (Robinson, 2004).

Kestabilan titik tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$

Pelinearan dilakukan untuk melihat kestabilan pada titik tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ dimana

$$\bar{N} = \frac{K(r - r_0)(\pi\theta^2 - \lambda_0\theta_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta} ,$$

$$\bar{P} = \frac{\lambda K\theta_0(r - r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta} ,$$

$$\bar{I} = \frac{K\pi\theta\lambda(r - r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0) - K\alpha\lambda\pi\theta}$$

Untuk menyederhanakna penulisan, dilakukan pemisalan: $\bar{N} = G$ dan $\bar{P} = X, \bar{I} = W$ sehingga menghasilkan matriks Jacobi seperti pada Gambar 1

$$\begin{bmatrix} -G\beta_2 - WsI + s - s_0 & 0 & 0 & 0 \\ G\beta_1 & r\left(1 - \frac{G}{K}\right) - \frac{rG}{K} - r_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda\theta & -\theta \\ \phi I s I W & 0 & \phi\theta & -\theta\theta \end{bmatrix}$$

Gambar 1. Matrik Jacobi titik Tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$

Selanjutnya, diperoleh nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|J_{E_3} - \psi I| = 0$ di mana I adalah matriks identitas seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= s - s_0 - \bar{I}s_1 - \bar{N}\beta_1 \\ \psi_2 &= (r - r_0) - \frac{2\bar{N}}{K} \\ \psi_{3,4} &= \frac{1}{2}(-\theta_0 - \lambda_0) \pm \frac{1}{2}(-4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\theta_0\lambda_0 + \theta_0^2 +)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Titik tetap E_3 akan bersifat tak stabil apabila $(r - r_0) > \frac{2\bar{N}}{K}$ atau $s - s_0 > \bar{I}s_1 + \bar{N}\beta_1$ sebaliknya akan bersifat stabil jika memenuhi:

$$\begin{aligned} (r - r_0) &< \frac{2\bar{N}}{K} \\ s - s_0 &< \bar{I}s_1 + \bar{N}\beta_1 \\ (-\theta_0 - \lambda_0) &< \pm(-4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\theta_0\lambda_0 + \theta_0^2 +)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Titik tetap tersebut akan berjenis *saddle point* apabila terdapat perbedaan tanda pada persamaan nilai egen $\psi_1, \psi_2, \psi_{1,3,4}$ (Robinson, 2004). Hal ini bergantung pada nilai parameter masing-masing.

Kestabilan Titik Tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$

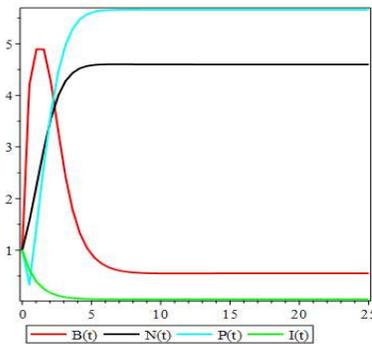
Sifat kestabilan $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ berbeda dengan tiga titik tetap sebelumnya karena sulit dijelaskan secara eksplisit. Oleh karena itu, titik tetap tersebut ditemukan melalui pendekatan numerik dengan memberikan nilai untuk semua parameter yang ada pada sistem persamaan (1). Hal ini diuraikan pada simulasi di bawah ini.

d. Simulasi Model

Salah satu tujuan dari penelitian ini adalah melakukan simulasi pada model untuk melihat pengaruh dari perubahan nilai parameter pada sistem (1). Simulasi ini dilakukan sebab sistem tersebut sulit diamati secara langsung sehingga melalui simulasi bisa diamati dinamika model. Nilai parameter awal untuk simulasi (Dubey *et al.*, 2009; Anggriani, Nurhayati dan Subchan, 2018):

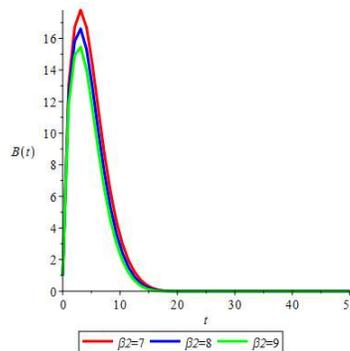
$$\begin{aligned} L &= 40, K = 50, \beta_3 = 6, \pi = 0.001, \theta = 8, \lambda = 5, \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 7, \beta_3 = 6, \\ \pi_1 &= 0.005, s_1 = 4, s = 34, s_0 = \theta_0 = 1, r = 11, r_0 = 10, r_1 = 1, \\ \alpha_1 &= 0,00001, \quad \lambda_0 = 4, \theta = 0.14 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ dengan $B^* = 0.5509$, $N^* = 4.5996$, $P^* = 5.6580$, $I^* = 0.4577$. Adapun model grafik kestabilan dari titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ dapat dilihat pada Gambar 2:



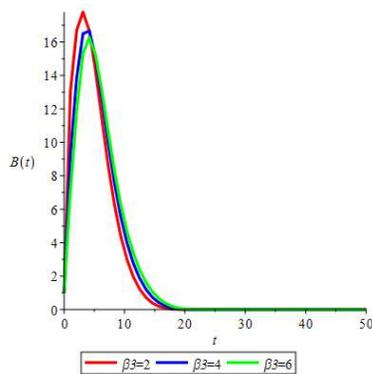
Gambar 2. Grafik Kestabilan Titik Tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$

Terlihat pada Gambar 2 bahwa solusi sistem persamaan (1) menuju titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$. Kepadatan hutan menuju nilai keseimbangannya, yaitu 0.5509. Kepadatan populasi penduduk juga menuju nilai keseimbangannya (4.5996). Tekanan kepadatan populasi penduduk menuju nilai keseimbangannya, yaitu 5.6580 dan kepadatan industrialisasi menuju nilai keseimbangannya (0.4577). Berikut ini ditampilkan beberapa gambar grafik hasil simulasi dengan bervariasi nilai parameter yang telah diberikan sebelumnya.



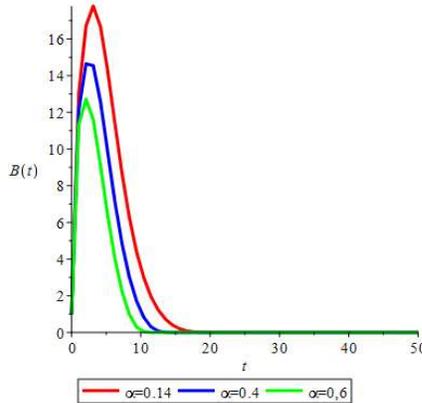
Gambar 3. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai β_2

Gambar 3 memperlihatkan bahwa kepadatan biomassa hutan (B) mengalami penipisan hingga mencapai keseimbangannya karena terjadi peningkatan pada nilai β_2 . Artinya, terjadi pengurangan kepadatan biomassa hutan akibat terjadi peningkatan laju pengurangan biomassa hutan yang disebabkan adanya populasi penduduk. Keseimbangan biomassa hutan itu sendiri nilainya lebih kecil dari daya dukung lingkungan terhadap biomassa hutan.



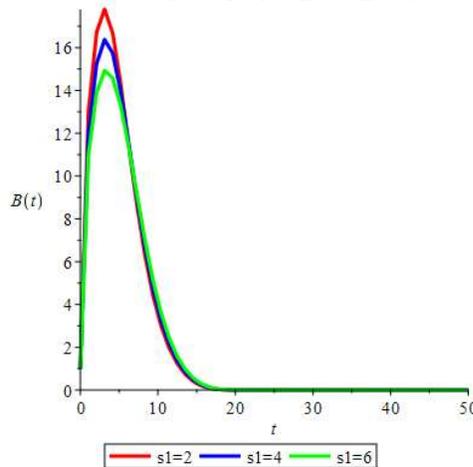
Gambar 4. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai β_3

Hal yang sama juga terjadi ketika nilai β_3 meningkat yang mengakibatkan sumber daya hutan akan berkurang seperti yang dapat dilihat pada Gambar 4. Ini bermakna meningkatnya jumlah area industri berdampak pada sumber daya hutan hingga mencapai titik keseimbangannya.



Gambar 5. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai α

Gambar 5 menunjukkan nilai kepadatan biomassa hutan (B) mengalami penipisan hingga mencapai keseimbangannya karena terjadi peningkatan pada nilai α . Bertambahnya jumlah migrasi penduduk berakibat terjadinya pengurangan pada sumber daya hutan.



Gambar 6. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai s_1

Gambar 6 menunjukkan terjadinya penurunan pada kepadatan biomassa hutan (B) hingga mencapai titik keseimbangannya karena peningkatan pada nilai s_1 . Ini berarti terjadi penurunan sumber daya hutan akibat meningkatnya industrialisasi hingga mencapai titik keseimbangannya.

4. KESIMPULAN

Pada artikel ini, sebuah model matematika taklinear telah dipelajari untuk menjelaskan penipisan sumber daya hutan dengan mempertimbangkan faktor migrasi penduduk pada populasi penduduk akibat adanya industri. Model telah dianalisis dengan menggunakan teori kestabilan dari sistem persamaan diferensial biasa taklinear dan dilakukan simulasi numerik. Analisis model menunjukkan bahwa terdapat empat titik tetap tak negatif dimana tiga titik tetap pertama, yaitu $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$, $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ adalah titik tetap tak stabil berjenis *saddle point* apabila memenuhi kondisi

tertentu. Untuk titik tetap yang keempat, yaitu $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ dilihat dengan menggunakan pendekatan numerik karena tidak mudah diuraikan secara eksplisit.

Berdasarkan hasil simulasi diperoleh kestabilan sumber daya hutan mengalami penurunan hingga mencapai titik keseimbangannya karena terjadi peningkatan pada populasi penduduk, tekanan populasi penduduk, serta industrialisasi. Pada hasil simulasi terlihat bahwa pertumbuhan populasi penduduk menyebabkan penurunan sumber daya hutan.. Sebaliknya keberadaan sumber daya hutan berpengaruh positif terhadap tingkat populasi penduduk. Migrasi penduduk karena adanya industri mengakibatkan terjadinya penipisan sumber daya hutan. Untuk semua simulasi yang telah dilakukan, disimpulkan bahwa jika kondisi kestabilan tersebut terpenuhi, maka dinamika persamaan pada sistem (1) pasti mencapai tingkat kestabilannya.

5. REFERENSI

- Anggriani, I., Nurhayati, S. and Subchan, S. (2018) ‘Analisis Kestabilan Model Penurunan Sumber Daya Hutan Akibat Industri’, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 15(1), pp. 31–40. Available at: <https://doi.org/10.12962/limits.v15i1.3560>.
- Dubey, B. *et al.* (2009) ‘Modelling the Depletion of Forestry Resources by Population and Population Pressure Augmented Industrialization’, *Applied Mathematical Modelling*, 33, pp. 3002–3014. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.10.028>.
- Dubey, B. and Narayanan, A.S. (2010) ‘Modelling Effects of Industrialization, Population, and Pollution on a Renewable Resource’, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, pp. 2833–2848. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.10.007>.
- Dubey, B., Upadhyay, R.K. and Hussain, J. (2003) ‘Effects of Industrialization and Pollution on Resource Biomass : a Mathematical Model’, *Ecological Modelling*, 167, pp. 83–95. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00168-6](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00168-6).
- Eswari, A. *et al.* (2019) ‘Analysis of Mathematical Modeling the Depletion of Forestry Resource: Effects of Population and Industrialization’, *Matrix Science Mathematic*, 3(2), pp. 22–26. Available at: <https://doi.org/10.26480/msmk.02.2019.22.26>.
- Ezeorah, J. and Ekaka-A, E.N. (2022) ‘Modelling the Effect of Depletion Rate of Forestry Resources due to Industrialization on the Effect of Population and Population Augmented Industrialization on Forestry Resources’, *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 11(6), pp. 4–7.
- Misra, A.K., Lata, K. and Shukla, J.B. (2014) ‘A Mathematical Model for The Depletion of Forestry Resoources Due to Population and Population Pressure Augmented Industrialization’. dalam *International Journal of Modeling Simulation and Scientific Computation*, *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 5(1), pp. 1–16. Available at: <https://doi.org/10.1142/S1793962313500220>.
- Ramdhani, V., Jaharuddin and Nugrahani, E.H. (2015) ‘Dynamical System of Modelling the Depletion of Forestry Resources Due to Crowding by Industrialization. dalam *Applied Mathematical Sciences*’, *Applied Mathematical Sciences*, 9(82), pp. 4067–4079. Available at: <https://doi.org/10.12988/ams.2015.53259>.
- Ramdhani, V. and Safitri, Y.R. (2023) ‘Stability Analysis of Fixed Points in Forest Biomass Depletion Model. Sainstek’, *Jurnal Sains dan Teknologi*, 15(2), pp. 98–109.

- Robinson, J.C. (2004) *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press. London: Cambridge University Press. Available at: http://scioteca.caf.com/bitstream/handle/123456789/1091/RED2017-Eng-8ene.pdf?sequence=12&isAllowed=y%0Ahttp://dx.doi.org/10.1016/j.regsciurbeco.2008.06.005%0Ahttps://www.researchgate.net/publication/305320484_SISTEM_P_EMBETUNGAN_TERPUSAT_STRATEGI_MELESTARI.
- Shukla, J.B., Lata, K. and Misra, A.K. (2011) 'Modelling the Depletion of a Renewable Resource by Population and Industrialization: Effect of Technology on Its Conservation', *Natural Resource Modeling*, 24(2), pp. 242–267. Available at: <https://doi.org/10.1111/j.1939-7445.2011.00090.x>.
- Sundar, S., Swaroop, N. and Naresh, R. (2017) 'Modeling the Effect of Population and Population Augmented Industrialization on Forestry Resources', *European Journal of Engineering Research and Science*, 2(1), pp. 65–72. Available at: <https://doi.org/10.24018/ejers.2017.2.1.247>.
- Wakhidah, U.U.S., Nugraheni, K. and Winarni, W. (2022) 'Analisis Model Penipisan Sumber Daya Hutan Bakau Akibat Pembukaan Tambak Ikan dengan Waktu Tunda', *Jurnal Ilmu Dasar*, 23(1), pp. 65–74. Available at: <https://doi.org/10.19184/jid.v23i1.23889>.