

## Eksplorasi Kesalahan Mahasiswa pada Materi Turunan dan Integral Berdasarkan Teori APOS

Rif'atul Khusniah<sup>1</sup> Rofila El Maghfiroh<sup>2</sup>

Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang, Kota Malang, Provinsi Jawa Timur, Indonesia <sup>1,2</sup>

Email: [rkhusniah@polinema.ac.id](mailto:rkhusniah@polinema.ac.id)<sup>1</sup> [rofila.elma@gmail.com](mailto:rofila.elma@gmail.com)<sup>2</sup>

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi kesalahan mahasiswa pada mata kuliah matematika terapan di Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang pada materi turunan dan integral. Penelitian ini merupakan penelitian studi kasus yang menggunakan pendekatan kualitatif. Data dikumpulkan dari hasil ujian mahasiswa yang kemudian diklasifikasikan berdasarkan kategori kesalahan menggunakan teori Aksi, Proses, Objek dan Skema. Mahasiswa menunjukkan empat jenis kesalahan dari lima kategori yang ditentukan. Kesalahan terbanyak yang muncul yaitu kesalahan konseptual dan kesalahan interpretasi yang berada pada level Aksi di teori APOS, sedangkan kesalahan ekstrapolasi linear tidak muncul pada penelitian ini.

**Kata Kunci:** Eksplorasi;Integral;Kesalahan;Teori APOS;Turunan



This work is licensed under a [Lisensi Creative Commons Atribusi-BerbagiSerupa 4.0 Internasional](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

### PENDAHULUAN

Seiring dengan tren globalisasi, saat ini para insinyur diharapkan dapat bekerja secara efektif melampaui batas budaya dan nasional (Mazzurco et al., 2020). Kompetensi esensial telah diidentifikasi untuk insinyur yang bekerja di industri. Kompetensi ini mencakup (tapi tidak terbatas pada) berpikir kritis, pemecahan masalah, kerja tim, dan komunikasi. Namun, beberapa penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa teknik sering gagal mengembangkan kompetensi penting ini (Ebrahiminejad, 2017).

Untuk mengatasi kesenjangan kompetensi bagi *freshgraduate* sebelum memasuki dunia industri, penting bagi institusi pendidikan tinggi memahami dan mengidentifikasi kompetensi yang menjadi kebutuhan dalam industri. Selain itu, lembaga pendidikan tinggi terutama vokasi harus mengembangkan dan menilai kompetensi mahasiswa berdasarkan tuntutan profesional dunia industri. Semua mata kuliah, termasuk matematika terapan, harus mendefinisikan hasil belajar mereka sedemikian rupa sehingga dapat memfasilitasi ketercapaian kompetensi. Konsep kompetensi dapat didefinisikan sebagai kemampuan untuk melaksanakan tugas atau menghadapi situasi secara efektif dengan menggunakan pengetahuan, keterampilan, dan sikap.

Matematika terapan sebagai salah satu mata kuliah umum di Jurusan Teknik Sipil menjadi salah satu mata kuliah yang mendukung ketercapaian kompetensi ini karena didalamnya termuat prinsip-prinsip berpikir kritis dan pemecahan masalah (Ferrini-Mundy, 2000). Karena kompetensi ini dosen harus mendefinisikan dan mengembangkan tujuan pembelajaran, merancang metode pengajaran, serta menerapkan sistem evaluasi yang tepat (Mazario et al., 2012). Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi kesalahan mahasiswa pada materi turunan dan integral untuk mengembangkan teknik mengatasi kesalahan yang ditampilkan oleh mahasiswa yang menjadi objek penelitian. Diharapkan teknik yang akan dikembangkan nantinya dapat mendukung ketercapaian kompetensi esensial bagi mahasiswa Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang.

Penelitian ini menggunakan teori APOS yang dikembangkan oleh (Dubinsky, 2002) untuk menjelaskan kesalahan siswa dalam mempelajari materi turunan dan integral. Menurut

(Dubinsky & McDonald, 2001) teori APOS merupakan teori konstruktivitas tentang bagaimana mempelajari konsep matematika dapat terjadi. Pada penelitian (Siyepu, 2013) yang menggunakan teori APOS menyarankan bahwa pengajaran aturan dasar pada turunan harus menekankan pembatasannya untuk meminimalisir kesalahan umum. Penelitian tentang kerangka teori dan klasifikasi kesalahan menggunakan teori APOS juga dilaporkan oleh (Maharaj, 2013) tentang materi turunan serta (Maharaj, 2014) tentang integral. Beberapa penelitian lain yang menggunakan teori APOS diantaranya (Figueroa et al., 2018), (Syamsuri & Marethi, 2018), (Kazunga & Bansilal, 2020), (Martínez-planell, 2020), (Syamsuri & Santosa, 2021), serta (Dinnullah, 2021).

### METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi kasus yang menggunakan pendekatan kualitatif. Untuk menganalisis kesalahan mahasiswa pada pembelajaran turunan dan integral digunakan empat tahap utama dari Teori APOS yaitu *Action-Process-Object-Schema (APOS)* (Arnon et al., 2014). Tujuan penerapan teori ini adalah untuk mengungkapkan sifat pemahaman mahasiswa daripada memberikan perhitungan statistik dari kinerja mahasiswa. Subjek pada penelitian ini adalah mahasiswa tingkat pertama pada Jurusan Teknik Sipil yang menempuh mata kuliah Matematika Terapan di semester genap 2021/2022. Mahasiswa yang dipilih sebagai subjek sebanyak 22 mahasiswa. Penelitian ini menggunakan berbagai jenis instrumen penelitian untuk mengumpulkan data seperti hasil tes tulis mahasiswa, rekaman audio dan video serta wawancara mendalam. Akan tetapi pada artikel ini hanya membahas eksplorasi kesalahan yang ditunjukkan oleh mahasiswa pada tes tertulis.

Pada kegiatan penelitian ini, sebelumnya mahasiswa mempelajari konsep serta langkah demi langkah penyelesaian turunan dan integral secara bersama-sama di kelas. Selanjutnya mahasiswa mengerjakan latihan soal dengan topik yang berkaitan dengan materi turunan dan integral secara mandiri sebagai tugas juga sebagai latihan soal di kelas. Tes akhir diberikan pada akhir semester dan dilaksanakan secara online. Hasil tes akhir inilah yang nantinya akan diperiksa dan digunakan untuk mengeksplorasi letak dan jenis kesalahan mahasiswa khususnya pada materi turunan dan integral. Hasil penelitian ini nantinya diharapkan memuat kemungkinan penyebab kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa serta teknik yang dapat digunakan untuk mengurangi kesalahan yang mungkin akan muncul.

Soal yang digunakan sebagai alat untuk mendiagnosis kesalahan yang mungkin muncul berjumlah 4 soal yang terdiri dari 2 soal turunan dan 2 soal Integral seperti pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1. Daftar Pertanyaan Pada Tes Tertulis**

Pertanyaan 1	Tentukan turunan dari fungsi $y = \ln(4x^2 - x)$
Pertanyaan 2	Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = e^{2x}(x + 3)$
Pertanyaan 3	Tentukan hasil dari $\int (2 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$
Pertanyaan 4	Hasil dari $\int 3 \sin 5t \cos 5t dt$ adalah ...

Hasil tes mahasiswa kemudian diperiksa untuk diidentifikasi dan jenis kesalahan yang muncul akan dikategorikan berdasarkan pada penelitian (Siyepu, 2013) seperti berikut:

**Tabel 2. Jenis Kesalahan Dan Deskripsinya**

Jenis Kesalahan	Keterangan
<i>Conceptual Errors</i>	Kesalahan yang terjadi karena kegagalan mahasiswa dalam memahami konsep yang berkaitan dengan permasalahan yang ada atau kegagalan untuk memahami relasi yang berkaitan. Misalnya kesalahan dalam menuliskan turunan dari $y = (\ln 3)^x$ adalah $\frac{dy}{dx} = (\ln 3)^x$
<i>Interpretation Errors</i>	Kegagalan dalam menafsirkan sifat masalah dengan benar karena generalisasi yang berlebihan dari aturan matematika tertentu. Seperti kesalahan penulisan turunan dari $y = (\ln 3)^x$ adalah $\frac{dy}{dx} = x(\ln 3)^{x-1}$
<i>Linear Extrapolation Errors</i>	Kesalahan yang terjadi karena generalisasi properti yang berlebihan atas $f(a + b) = f(a) + f(b)$ yang seharusnya hanya berlaku bila $F$ adalah fungsi linear. Seperti kesalahan dalam menghitung $y = \ln(3x^2 + 2) = \ln 3x^2 + \ln 2$
<i>Procedural Errors</i>	Kesalahan yang terjadi ketika mahasiswa gagal melakukan manipulasi ataupun algoritma meskipun mereka memahami konsep yang berlaku dalam masalah tersebut. Seperti penulisan turunan dari $y = 5x^3$ adalah $\frac{dy}{dx} = 5$
<i>Arbitrary Errors</i>	Kesalahan yang muncul secara acak atas perilaku sewenang-wenang mahasiswa dalam memahami dan menyelesaikan permasalahan yang ada. Seperti kesalahan dalam menuliskan kembali soal ataupun tanda operasi.

## HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

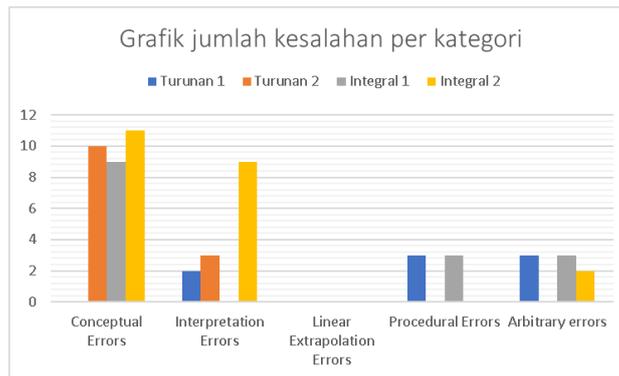
### Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian diperoleh beberapa jenis kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa sesuai dengan kategori diatas ditunjukkan pada Tabel 3 berikut.

**Tabel 3. Jumlah kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa pada tes tertulis**

	<i>Conceptual Errors</i>	<i>Interpretation Errors</i>	<i>Linear Extrapolation Errors</i>	<i>Procedural Errors</i>	<i>Arbitrary errors</i>
Turunan 1	0	2	0	3	3
Turunan 2	10	3	0	0	0
Integral 1	9	0	0	3	3
Integral 2	11	9	0	0	2
Total Kesalahan	20	14	0	6	8

Tabel 3 menginformasikan bahwa rata-rata mahasiswa masih memiliki kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal terkait turunan dan integral walaupun mereka telah mendapatkan materi secara lengkap serta telah menyelesaikan beberapa tahapan latihan soal sebelumnya. Kesalahan karena gagal memahami konsep masih menjadi penyebab terbesar yang juga menyebabkan kesalahan interpretasi, penyebab kesalahan terbesar selanjutnya yaitu dikarenakan sikap sewenang-wenang mahasiswa dalam mengerjakan soal sehingga banyak terjadi kesalahan penulisan operasi dan perhitungan karena hal tersebut. Hal ini banyak terjadi ketika mahasiswa kurang memahami apa yang akan dilakukan pada proses penyelesaian soal tersebut sehingga mereka menuliskan apapun yang terlintas pada pikiran mereka. Grafik yang menggambarkan jumlah kesalahan mahasiswa ditunjukkan pada Gambar 1.

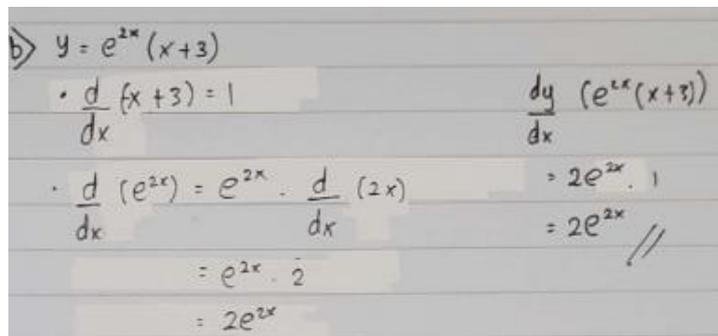


**Gambar 1. Grafik Jumlah Kesalahan Mahasiswa**

**Pembahasan**

Kesalahan pada penerapan konsep turunan dan integral menjadi penyumbang terbesar dari kesalahan yang muncul pada penelitian ini. Kesalahan konseptual merupakan kesalahan yang dilakukan siswa dalam menafsir istilah, fakta-fakta, konsep, dan prinsip. Kesalahan konseptual terjadi karena mahasiswa gagal dalam memahami konsep yang harusnya digunakan dalam pemecahan masalah.

Pada soal turunan yang pertama, mahasiswa sepenuhnya telah memahami konsep turunan pada fungsi logaritma natural serta mampu menerapkan aturan rantai pada turunan fungsi logaritma. Pada soal turunan yang kedua, kesalahan konseptual menjadi kesalahan terbanyak yang muncul. Kesalahan konseptual yang muncul pada penyelesaian soal turunan ini antara lain mahasiswa gagal dalam menerapkan aturan hasil kali  $[\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]$ .



**Gambar 2. Conceptual Error Yang Muncul Pada Turunan**

Gambar 2 menunjukkan salah satu kesalahan pada penerapan konsep turunan dimana mahasiswa menyelesaikan turunan dari dua fungsi dengan melakukan perkalian biasa hasil turunan, dimana seharusnya mereka menggunakan aturan hasil kali pada turunan untuk menyelesaikan soal tersebut. Pada soal integral, kesalahan konseptual yang muncul antara lain terlihat pada Gambar 3.

$$\begin{aligned}
 & \int (2 - \frac{x^2}{5} - 1 \cdot x^{-1/2}) \\
 &= 2x - \frac{1}{2+1} \cdot \frac{x^{2+1}}{5} - \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} \\
 &= 2x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{5} - \frac{1}{1/2} x^{1/2} \\
 &= 2x - \frac{x^3}{15} - 2x^{1/2} \\
 &= 2x - \frac{x^3}{15} - 2\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Pada soal integral, beberapa kesalahan konseptual yang muncul diantaranya penggunaan variabel diferensial seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 & b. \int 3 \sin 5t \cos 5t \, dt \\
 & \int \frac{3}{2} \sin 10t \, dt \\
 & \frac{3}{2} \int \sin 10t \, dt \\
 & \frac{3}{2} \int \frac{\sin x}{10} \, dt \\
 & \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} \int \sin x \, dt \\
 & \frac{3}{20} \cdot (-\cos x) \\
 & \frac{3}{20} \cdot (-\cos 10t) \\
 & \underline{\underline{-\frac{3 \cos 10t}{20} + C}} //
 \end{aligned}$$

**Gambar 3. Conceptual Error Yang Muncul Pada Integral**

Pada gambar diatas, terdapat kesalahan pada penggunaan  $dx$  dan  $dt$ . Mahasiswa belum memahami konsep penggunaan  $dx$  dan  $dt$  secara tepat, sehingga menuliskan  $\int \sin x \, dt$  dimana seharusnya adalah  $\int \sin x \, dx$ . Selain itu terdapat kesalahan pada penggunaan  $dx$  yaitu mahasiswa masih menuliskannya pada hasil akhir integral. Mahasiswa yang melakukan kesalahan konseptual berada pada level Aksi (*Action*) pada teori APOS.

*Interpretation errors* muncul ketika mahasiswa gagal dalam menafsirkan sifat asli dari permasalahan yang ada. Pada soal turunan 1 kesalahan interpretasi muncul pada saat menurunkan  $u = (4x^2 - x)$  sebagai  $\frac{du}{dx} = 8x$ . Kesalahan interpretasi juga muncul pada hasil jawaban soal turunan 2 dimana terjadi salah interpretasi pada hasil akhir jawaban.

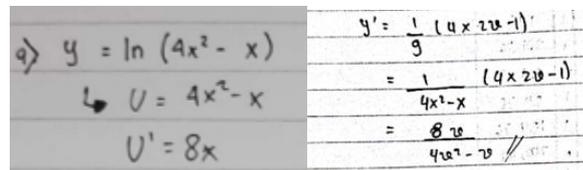
$b. y = e^{2x}(x+3)$   
 Misal:  $T = 2x$   
 $T' = 2$   
 $Y_1 = e^T = e^{2x}$   
 $Y_1' = 2e^{2x}$   
 $Y_2 = x+3$   
 $Y_2' = 1$   
 $Y' = Y_1' + Y_2' = 2e^{2x} + 1$

**Gambar 4. Interpretation Error Yang Muncul Pada Turunan**

Pada Gambar 4 terlihat bahwa terdapat kesalahan interpretasi ketika mahasiswa menyusun jawaban akhir dimana dua fungsi yang telah diturunkan secara terpisah kemudian dijumlahkan sedangkan pada soal merupakan perkalian dua fungsi yang seharusnya diselesaikan dengan menerapkan aturan hasil kali.

Pada soal integral 1 dan 2, mahasiswa melakukan beberapa kesalahan dalam menginterpretasi soal yang ada. Diantaranya salah menuliskan notasi  $dt$  dengan  $dx$ , kesalahan ini cukup banyak muncul. Mahasiswa yang melakukan kesalahan interpretasi berada pada level Aksi (*Action*) pada teori APOS. Interpretasi yang buruk terhadap konsep turunan mengarahkan mahasiswa untuk melakukan prosedur yang salah.

Kesalahan prosedural muncul dikarenakan mahasiswa melakukan kesalahan pada prosedur manipulasi dan algoritma meskipun pada dasarnya mereka telah memahami konsep yang ada. Beberapa kesalahan prosedural yang muncul diantaranya kesalahan pada saat menurunkan fungsi dan proses perhitungan pada penyelesaian soal turunan seperti berikut:



$$\begin{aligned}
 & \text{d) } y = \ln(4x^2 - x) \\
 & \quad \hookrightarrow u = 4x^2 - x \\
 & \quad \quad u' = 8x \\
 & \quad y' = \frac{1}{9} (4x^2 - 1) \\
 & \quad = \frac{1}{4x^2 - x} (4x^2 - 1) \\
 & \quad = \frac{8x}{4x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Pada penyelesaian soal integral, beberapa kesalahan prosedural yang muncul diantaranya tidak menambahkan konstanta pada penyelesaian integral tak tentu dan tidak menyertakan  $dx$  pada proses pengintegralan. Mahasiswa yang menunjukkan kesalahan prosedural terletak pada tingkat proses teori APOS. Mereka menunjukkan pemahaman pada konsep akan tetapi gagal dalam penerapannya.

Jenis kesalahan terakhir yang muncul yaitu *Arbitrary Error*, yaitu kesalahan yang muncul ketika mahasiswa mengerjakan tanpa memperhitungkan konsep dan kendala yang muncul seperti salah dalam menuliskan soal, tidak mengerjakan soal yang ada dan salah dalam penulisan tanda minus. Mahasiswa yang menunjukkan kesalahan seperti ini tidak dikategorikan pada tahapan teori APOS dikarenakan kesalahan yang muncul tidak didasarkan pada penalaran apapun.

## KESIMPULAN

Hasil penelitian mengungkapkan bahwa mahasiswa menunjukkan beberapa jenis kesalahan karena kurangnya pemahaman akan konsep turunan dan integral. Mereka cenderung menghafalkan aturan yang ada tanpa memahami lebih lanjut akan maksud dan kegunaannya. Akibat dari kurangnya pemahaman akan konsep turunan dan integral menyebabkan munculnya kesalahan interpretasi yang akhirnya mengarah pada munculnya kesalahan-kesalahan lainnya. Kesalahan konsep dan interpretasi menunjukkan mahasiswa berada pada level aksi pada teori APOS, sedangkan kesalahan prosedural menunjukkan mahasiswa berada pada level proses.

Berdasarkan temuan diatas, dosen diharapkan lebih memfokuskan pengajarannya pada pengembangan pemahaman relasional sehingga mahasiswa dapat mengetahui bagaimana penerapan aturan turunan dan integral secara benar serta dapat menggunakannya secara tepat pada persoalan matematika tertentu. Dengan penguatan pada pemahaman relasional diharapkan dapat memperkuat daya ingat mahasiswa. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan observasi mendalam pada perilaku mahasiswa di kelas sehingga akar permasalahan dapat diketemukan dan dicari solusinya sehingga kesalahan-kesalahan yang muncul dapat diminimalisir pada pembelajaran-pembelajaran selanjutnya.

Saya mengucapkan terima kasih pada seluruh mahasiswa yang terlibat serta dosen-dosen yang turut serta pada penelitian ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Dinnullah, R. N. I. (2021). Analisis pemahaman konsep berdasarkan tahapan apos peserta didik pada sistem persamaan linear dua variabel. *Rainstek Jurnal Terapan Sains Dan Teknologi*, 3(4), 282–299. <https://doi.org/10.21067/jtst.v3i4.6335>

- Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*, 95–126. [https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_7](https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7)
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Education Research. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, 7(3), 275–282. <http://www.springerlink.com/content/v213717886v31357/>
- Ebrahiminejad, H. (2017). A systematized literature review: Defining and developing engineering competencies. *ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings, 2017-June*. <https://doi.org/10.18260/1-2--27526>
- Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(8), 868–876.
- Figuroa, A. P., Possani, E., & Trigueros, M. (2018). *Matrix multiplication and transformations: an APOS approach. November 2017*. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.002>
- Kazunga, C., & Bansilal, S. (2020). An APOS analysis of solving systems of equations using the inverse matrix method. *Educational Studies in Mathematics*, 103(3), 339–358. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09935-6>
- Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, 33(1), 1–19. <https://doi.org/10.15700/saje.v33n1a458>
- Maharaj, A. (2014). An APOS analysis of natural science students' understanding of integration. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(1), 54–73. <https://doi.org/10.15700/saje.v33n1a458>
- Martínez-planell, R. (2020). *On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory*.
- Mazario, F. G., López, A. G., Martín, A., de la Villa Cuenca, A., & Rodriguez, G. (2012). Learning and Assessing Competencies: New challenges for Mathematics in Engineering Degrees in Spain. *Proceeding of 16th SEFI MWG Seminar Mathematical Education of Engineers*, 1–7. <http://oa.upm.es/22922/>
- Mazzurco, A., Jesiek, B. K., & Allison, G. (2020). Development of Global Engineering Competency Scale: Exploratory and Confirmatory Factor Analysis. *Journal of Civil Engineering Education*, 146(2). <https://ascelibrary.org/doi/epdf/10.1061/%28ASCE%29EI.2643-9115.0000006>
- Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 577–592. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.001>
- Stewart, J. (2010). *Calculus: Early Transcendentals, Seventh Edition*.
- Suhady, W., Roza, Y., & Maimunah, M. (2019). Identifikasi Kesalahan Konseptual Dan Prosedural Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Pada Materi Dimensi Tiga. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 494–504. <https://doi.org/10.31004/cendekia.v3i2.143>
- Syamsuri, S., & Marethi, I. (2018). APOS analysis on cognitive process in mathematical proving activities. *International Journal on Teaching and Learning Mathematics*, 1(1), 1. <https://doi.org/10.18860/ijtlm.v1i1.5613>
- Syamsuri, S., & Santosa, C. A. (2021). Thinking Structure of Students' Understanding of Probability Concept in Term of Apos Theory. *MaPan*, 9(1), 119. <https://doi.org/10.24252/mapan.2021v9n1a8>